Измерение отклонений

Задача 1. [МОШ 2019/20, 10 класс, задача 1] Сопротивление терморезистора сильно зависит от температуры (график показан на рисунке), поэтому их используют в точных измерителях отклонения температуры ΔT от заданного значения T_0.

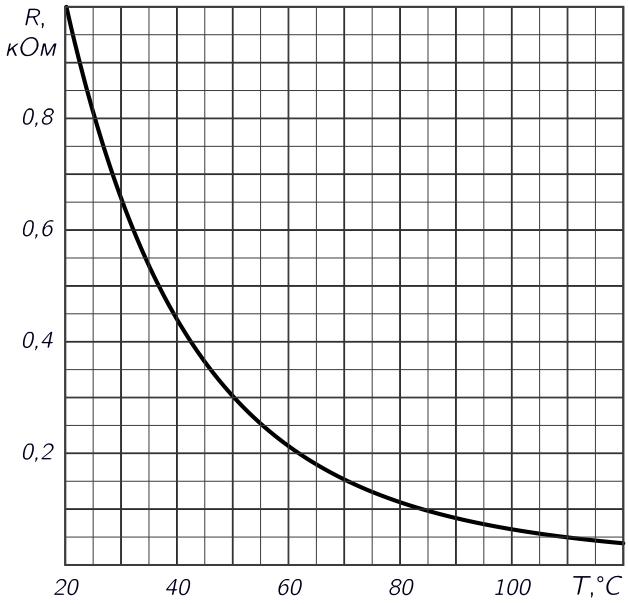
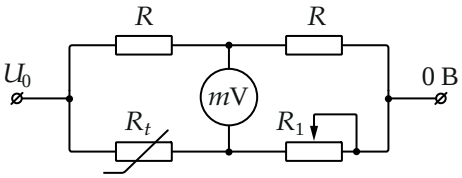


Схема измерителя показана на втором рисунке. Терморезистор обозначен R_t. Сопротивление переменного резистора R_1 можно изменять в диапазоне от 0 до 900 Ом. Выводы подключают к идеальному источнику с напряжением $U_0 = 6$ В. Перед началом измерения отклонения ΔT от температуры T_0 измеритель калибруют, подбирая сопротивление резистора R_1 так, чтобы идеальный стрелочный милливольтметр показывал ноль. В дальнейшем при изменении температуры на величину ΔT сопротивление терморезистора изменяется, милливольтметр показывает напряжение U.



1. Для температуры $T_0 = 50\,^\circ\text{C}$ определите зависимость $U(\Delta T)$, считая изменение сопротивления терморезистора малым. В области каких температур (высоких или низких) измеритель обеспечивает меньшую относительную погрешность измерения?
2. В каком диапазоне температур может работать данный измеритель, если нежелательно, чтобы на терморезисторе выделялась тепловая мощность больше $P_0 = 0{,}15$ Вт?

Примечание. Может оказаться полезной приближённая формула $(1 + x)^{-1} \approx 1 - x$, справедливая для малых x ($x \ll 1$).

▲ **Решение. Что происходит.** Схема — мост из двух делителей напряжения, подключённых к одному источнику. Верхний делитель из двух одинаковых R всегда держит в своей средней точке половину напряжения U_0. Нижний делитель R_t–R_1 при калибровке настроен так же, а когда температура меняется, R_t меняется и потенциал нижней средней точки уходит от $U_0/2$. Милливольтметр показывает этот уход. Класс задачи — мостовая схема с идеальным вольтметром: каждое плечо считаем отдельно как делитель.

Обозначения. Верхнюю среднюю точку назовём M, нижнюю — N (рис. 1); потенциал правого вывода 0, левого U_0. $R_0 = R_t(T_0)$ — сопротивление терморезистора при температуре калибровки, ΔR_t — его изменение. Наклон графика при T_0 обозначим k: $\Delta R_t = -k\Delta T$ (знак минус — сопротивление с ростом температуры падает).

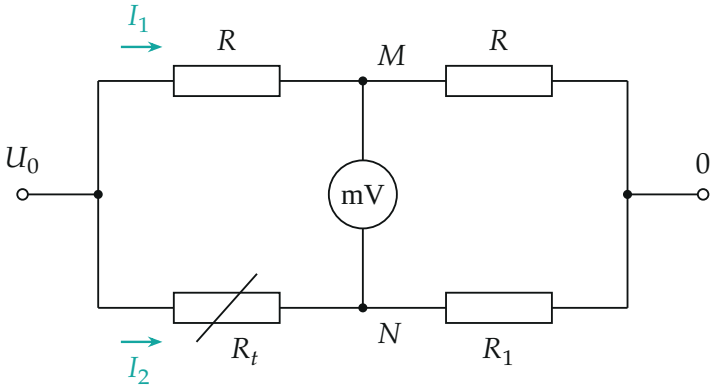


Рис. 1. Мост: верхний делитель R–R и нижний R_t–R_1; вольтметр идеальный, ток через него не идёт

Пункт 1.

1. Потенциалы средних точек. Вольтметр идеальный, ток через него не течёт, поэтому по верхней ветви идёт один ток I_1, а по нижней — один ток I_2: каждая ветвь — самостоятельный делитель. Закон Ома для верхней ветви: $I_1 = U_0/(2R)$, потенциал точки M равен напряжению на правом резисторе R:

$$\varphi_M = I_1 R = \frac{U_0}{2}.$$

Для нижней ветви $I_2 = U_0/(R_t + R_1)$, и потенциал N — напряжение на R_1:

$$\varphi_N = I_2 R_1 = \frac{U_0 R_1}{R_t + R_1}.$$

Сопротивление R в ответ не входит: верхний делитель из равных резисторов всегда даёт ровно половину.

2. Калибровка. Вольтметр показывает ноль, когда $\varphi_N = \varphi_M$, то есть $R_1/(R_t + R_1) = 1/2$:

$$R_1 = R_t(T_0) = R_0.$$

Дальше R_1 не трогают, а терморезистор становится $R_0 + \Delta R_t$.

3. Показание при отклонении. Милливольтметр показывает раз-

ность потенциалов

$$U = \varphi_N - \varphi_M = \frac{U_0 R_0}{2R_0 + \Delta R_t} - \frac{U_0}{2} \approx -\frac{U_0 \Delta R_t}{4R_0}.$$

Здесь использовано $(1+x)^{-1} \approx 1 - x$ при $x = \Delta R_t/(2R_0) \ll 1$ — это и есть условие малого изменения сопротивления.

4. Наклон графика при $T_0 = 50\,^\circ$C. При малом ΔT кривую $R(T)$ можно заменить касательной (рис. 2): $\Delta R_t = -k\Delta T$. По графику $R_0 = R(50\,^\circ\text{C}) \approx 300$ Ом. Касательная в этой точке проходит через $(50\,^\circ\text{C};\ 300\ \text{Ом})$ и пересекает ось T около $77\,^\circ$C, откуда

$$k \approx \frac{300\ \text{Ом}}{27\,^\circ\text{C}} \approx 11\ \text{Ом}/^\circ\text{C}.$$

Подставляем:

$$U = \frac{U_0 k}{4R_0}\Delta T \approx \frac{6 \cdot 11}{4 \cdot 300}\,\frac{\text{В}}{^\circ\text{C}}\,\Delta T \approx 55\,\frac{\text{мВ}}{^\circ\text{C}} \cdot \Delta T.$$

Знак плюс: при нагреве ($\Delta T > 0$) сопротивление R_t падает, на R_1 приходится больше половины напряжения, потенциал N поднимается выше потенциала M.

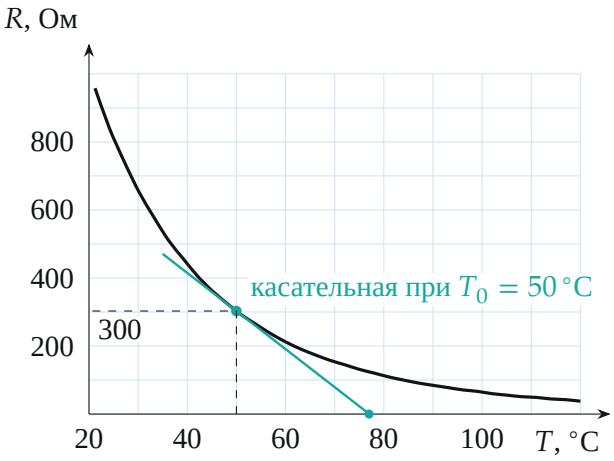


Рис. 2. График $R(T)$ терморезистора и касательная в рабочей точке: её наклон $k \approx 11$ Ом/°C

5. Где погрешность меньше. Коэффициент в формуле $U = S\,\Delta T$,

$$S = \frac{U_0}{4} \cdot \frac{k}{R_0},$$

— чувствительность моста: на сколько милливольт отклоняется стрелка на один градус. Стрелочный прибор имеет свою погрешность δU (цена деления), и отклонение температуры измеряется с погрешностью $\delta T = \delta U/S$: чем больше S, тем точнее. Значит, сравнивать надо не наклон k сам по себе, а отношение k/R_0 — относительную крутизну графика. Посчитаем её по графику в разных точках (рис. 3): при 30 °C $k/R_0 \approx 28/660 \approx 0{,}042$ °C^{-1}, при 50 °C $\approx 0{,}037$, при 100 °C $\approx 1{,}7/64 \approx 0{,}027$ °C^{-1}. Относительная крутизна падает с ростом температуры (график спадает медленнее экспоненты), поэтому чувствительность больше, а погрешность меньше при *низких* температурах. Та же погрешность δT при низкой температуре T составляет и меньшую долю от самой измеряемой величины.

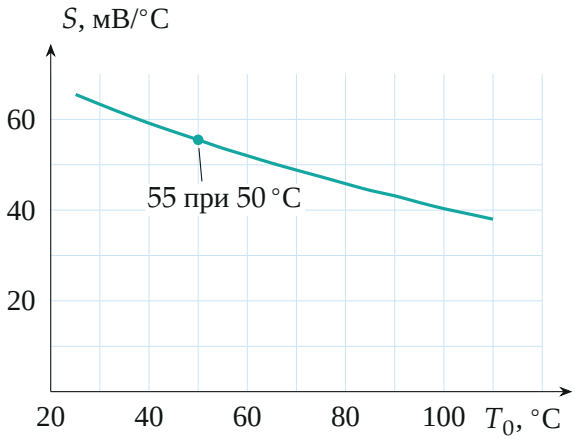


Рис. 3. Чувствительность моста $S = U_0 k/(4R_0)$ в зависимости от температуры калибровки T_0: посчитана по наклонам графика $R(T)$

Пункт 2.

6. Нижняя граница — калибровка. Откалибровать мост можно, только если найдётся $R_1 = R_t(T_0)$, а $R_1 \le 900$ Ом. По графику $R_t = 900$ Ом при $T \approx 23\,^\circ$C; при более низкой температуре $R_t > 900$ Ом, и ноль стрелки не выставить. Значит, $T_0 > 23\,^\circ$C.

7. Верхняя граница — нагрев терморезистора. В откалиброванном мосте $R_1 = R_t$, ток нижней ветви $I_2 = U_0/(2R_t)$, и по закону Джоуля–Ленца на терморезисторе выделяется мощность

$$P = I_2^2 R_t = \frac{U_0^2}{4R_t} \le P_0 \quad \Rightarrow \quad R_t \ge \frac{U_0^2}{4P_0} = \frac{36}{0{,}6}\ \text{Ом} = 60\ \text{Ом}.$$

Чем горячее, тем меньше R_t и тем больше мощность. По графику $R_t = 60$ Ом при $T \approx 100\,^\circ$C (рис. 4). При измерении отклонения ΔT мало и мощность почти не меняется.

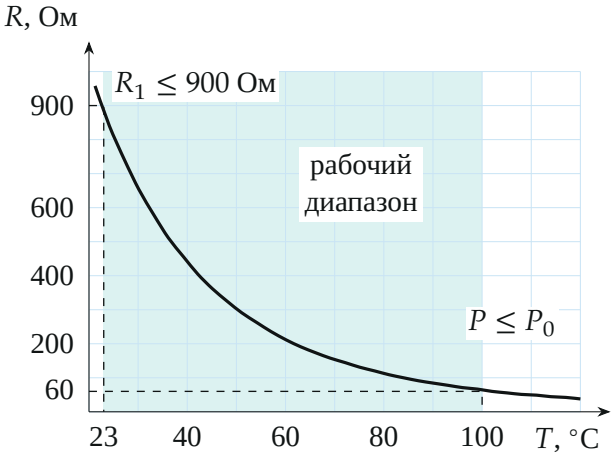


Рис. 4. Слева диапазон ограничен регулировкой R_1, справа — мощностью на терморезисторе

Обратите внимание. Точность задаёт не наклон k, а относительный наклон k/R_0: при высоких температурах график пологий, но и само сопротивление маленькое. Если бы зависимость была точной экспонентой, k/R_0 не зависело бы от температуры, и ответ на вопрос о погрешности решала бы только форма реального графика.

Проверка. Размерность: $U_0 k \Delta T / R_0$ — вольты на (Ом/°C)·°C/Ом, то есть вольты. Предел: при $k = 0$ (сопротивление не зависит от температуры) мост не разбалансируется, $U = 0$. Второй способ для пункта 1 — без линеаризации: при $\Delta T = 1\,^\circ\text{C}$ по графику $R_t \approx 289$ Ом, $\varphi_N = 6 \cdot 300/589 \approx 3{,}0560$ В, $U \approx 56$ мВ — совпадает с линейной формулой.

Смысл: мост сравнивает терморезистор с его же копией при T_0 и показывает только отклонение, поэтому даже крошечное изменение сопротивления видно на милливольтметре. У организаторов наклон прочитан как $k = 10$ Ом/°C и получено 50 мВ/°C; это в пределах точности чтения графика (критерии допускают $k = 10 \pm 1$ Ом/°C).

Ответ. 1) $U = \dfrac{U_0 k}{4R_t(T_0)}\,\Delta T \approx 55\,\text{мВ}/^\circ\text{C}\cdot\Delta T$ ($k = -dR_t/dT \approx 11$ Ом/°C, $R_t(T_0) \approx 300$ Ом); меньшая относительная погрешность — при низких температурах; 2) $23\,^\circ\text{C} < T < 100\,^\circ\text{C}$.