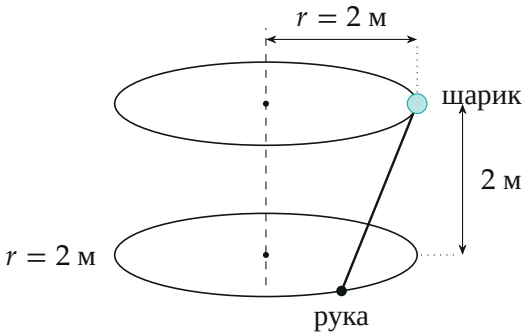
Мальчик с шариком

Задача 2. [МОШ 2019/20, 10 класс, задача 2] Мальчик Влад бегает по кругу, держа в руке конец нитки длиной $2\sqrt{2}$ м, к другому концу которой прикреплен небольшой надувной шарик с гелием внутри. Один круг Влад пробегает за 2π секунд. Рука, держащая нить, движется по окружности радиусом 2 м. Шарик движется по окружности такого же радиуса на 2 метра выше руки по вертикали. С какой установившейся скоростью будет взлетать шарик, если нить отпустить.

Можно считать, что сила сопротивления воздуха пропорциональна квадрату скорости, а радиус шарика много меньше длины нити. Ускорение свободного падения равно $g = 10$ м/с^2.



Поясняющий рисунок. Рука и шарик движутся по двум одинаковым окружностям с общей вертикальной осью; шарик на 2 м выше

▲ **Решение. Что происходит.** Пока Влад бежит, шарик равномерно движется по окружности. На него действуют четыре силы: тяжести, Архимеда, натяжения нити и сопротивления воздуха. Сопротивление направлено против скорости, то есть по касательной к окружности; его уравновешивает касательная составляющая натяжения — рука опережает шарик. Из этого кругового движения узнаём, как сопротивление связано с подъёмной силой $F_\text{A} - mg$. После того как нить отпустили, шарик разгоняется вверх, пока сопротивление не уравновесит ту же подъёмную силу. Класс задачи — динамика движения по окружности с сопротивлением; второй закон Ньютона в проекциях.

Обозначения. m — масса шарика с гелием, F_A — сила Архимеда, T — натяжение нити, $F = kv^2$ — сила сопротивления (k — неизвестный коэффициент), $l = 2\sqrt{2}$ м, $r = 2$ м, $h = 2$ м, $\omega = 2\pi/(2\pi\text{ с}) = 1\text{ с}^{-1}$ — угловая скорость, u — искомая скорость подъёма.

1. Угол нити с вертикалью. Вертикальный перепад между рукой и шариком $h = 2$ м, длина нити $l = 2\sqrt{2}$ м. Горизонтальная проекция нити $\sqrt{l^2 - h^2} = 2$ м, и

$$\cos\alpha = \frac{h}{l} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad \alpha = 45°.$$

2. Угол в горизонтальной плоскости. Посмотрим сверху (рис. 1). Проекции руки H' и шарика B' лежат на одной окружности радиуса $r = 2$ м с центром O, расстояние между ними 2 м. Треугольник $OB'H'$ равносторонний, все углы 60°. Горизонтальная составляющая натяжения $T_г$ направлена от шарика к руке, вдоль $B'H'$, то есть под углом $\beta = 60°$ к радиусу $B'O$ и под углом 30° к скорости шарика. Скорость шарика $v = \omega r = 2$ м/с направлена по касательной.

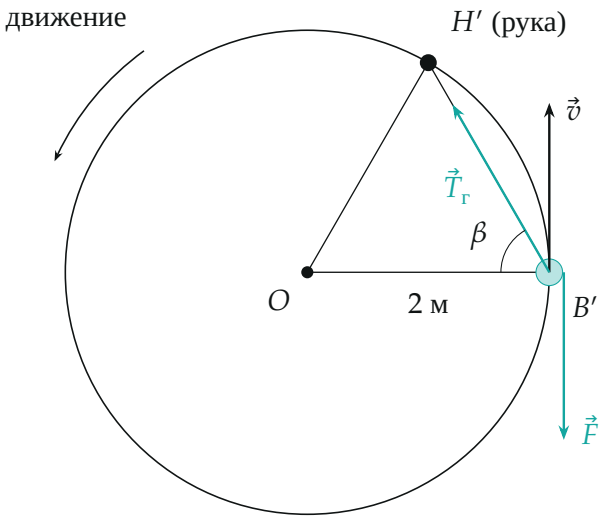


Рис. 1. Вид сверху. Треугольник $OB'H'$ равносторонний: $\beta = 60°$. Сопротивление $\vec{F}$ против скорости, рука ведёт шарик

3. Силы на шарик и оси. На шарик действуют сила тяжести $m\vec{g}$ вниз, сила Архимеда $\vec{F}_\text{A}$ вверх, натяжение $\vec{T}$ вдоль нити к руке (вниз и в сторону, под 45° к вертикали) и сопротивление $\vec{F}$ против скорости (рис. 2). Второй закон Ньютона для шарика:

$$m\vec{g} + \vec{F}_\text{A} + \vec{T} + \vec{F} = m\vec{a},$$

где $\vec{a}$ — центростремительное ускорение, оно горизонтально и направлено к оси. Оси выбираем так, чтобы ускорение попало только в одну: y — вертикально вверх, τ — вдоль скорости, n — к центру окружности. Тогда в проекциях на y и τ ускорение равно нулю и масса шарика в них войдёт только через силу тяжести.

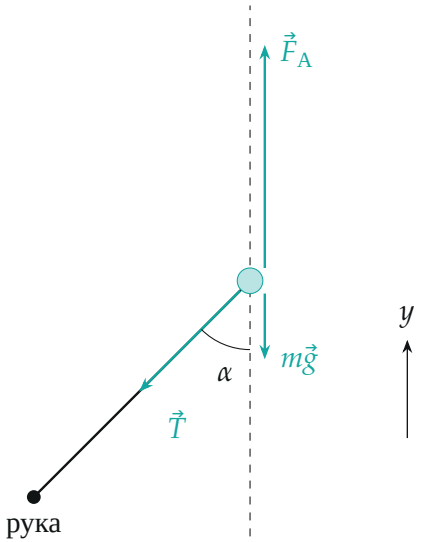


Рис. 2. Вертикальная плоскость, в которой лежит нить: $\alpha = 45°$. Сопротивление $\vec{F}$ перпендикулярно этой плоскости и здесь не видно

4. Проекция на вертикаль. Шарик не поднимается и не опускается, $a_y = 0$; натяжение даёт вертикальную проекцию $-T\cos\alpha$:

$$F_\text{A} - mg - T\cos\alpha = 0.$$

5. Проекция на направление скорости. Скорость по модулю постоянна, $a_\tau = 0$. Горизонтальная часть натяжения $T_\text{г} = T\sin\alpha$ даёт вдоль скорости $T\sin\alpha\cos 30^\circ = T\sin\alpha\sin\beta$, сопротивление — $-kv^2$:

$$T\sin\alpha\,\sin\beta - kv^2 = 0.$$

Проекция на n (к центру) $T\sin\alpha\cos\beta = mv^2/r$ лишь определяет массу шарика; для ответа она не нужна.

6. Исключаем натяжение. При $\alpha = 45^\circ$ $\cos\alpha = \sin\alpha$, из шага 4 $T\sin\alpha = F_\text{A} - mg$, и шаг 5 даёт

$$kv^2 = (F_\text{A} - mg)\sin\beta.$$

7. Свободный подъём. Нить отпустили — остаются тяжесть, Архимед и сопротивление. Шарик разгоняется вверх, сопротивление растёт с квадратом скорости, ускорение падает до нуля: устанавливается скорость u, при которой по второму закону Ньютона в проекции на вертикаль (рис. 3)

$$F_\text{A} - mg - ku^2 = 0.$$

Делим на уравнение шага 6, неизвестные k и $F_\text{A} - mg$ сокращаются:

$$\frac{u^2}{v^2} = \frac{1}{\sin\beta} \quad\Rightarrow\quad u = \frac{v}{\sqrt{\sin\beta}} = \frac{\omega r}{\sqrt{\sin 60^\circ}} = \sqrt{\frac{8}{\sqrt{3}}}\ \text{м/с} \approx 2{,}1\ \text{м/с}.$$

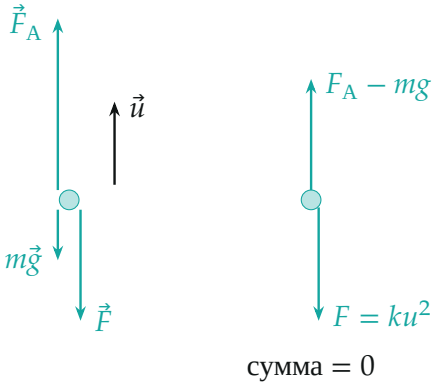


Рис. 3. Шарик без нити после разгона: подъёмная сила $F_A - mg$ уравновешена сопротивлением ku^2

Обратите внимание. Сопротивление при круговом движении горизонтально и направлено по касательной, а не к центру: его компенсирует только касательная составляющая натяжения. Поэтому важен угол β между горизонтальной частью нити и радиусом, а не только наклон нити α.

Проверка. Размерность: $u = v/\sqrt{\sin\beta}$ — м/с. Предел: если бы рука была точно впереди по касательной ($\beta = 90°$), вся горизонтальная часть натяжения шла бы на сопротивление, и $u = v$: сопротивление при круговом движении и при подъёме уравновешивало бы одну и ту же силу $F_A - mg$. При $\beta = 60°$ на сопротивление идёт лишь доля $\sin 60°$, значит, при движении по кругу сопротивление меньше, чем при подъёме, и $u > v$: 2,1 > 2 м/с.

Смысл: шарик, тянущийся по кругу за рукой, служит «весами» для сопротивления воздуха — по углам нити мы узнаём коэффициент k относительно подъёмной силы и сразу получаем скорость подъёма.

Ответ. $u = \dfrac{\omega r}{\sqrt{\sin 60°}} = \sqrt{\dfrac{8}{\sqrt{3}}}$ м/с $\approx 2{,}1$ м/с.