Эолипил

Задача 3. [МОШ 2019/20, 10 класс, задача 3] Эолипил (паровой двигатель, изобретённый в Древней Греции) представляет собой металлический котёл с двумя трубками на крышке, на которых, как на оси, может вращаться турбина в виде полого шара с двумя одинаковыми Г-образными патрубками (соплами). В котел заливают воду, герметично закрывают его и ставят на огонь. Образовавшийся при кипении водяной пар по трубкам поступает в шар и выходит с большой скоростью через сопла, заставляя шар вращаться (см. рисунок из «Википедии»). Пусть мощность подвода тепла к воде равна $P = 1$ кВт, площадь сечения патрубка $S = 0{,}1$ см^2, а расстояние от сопла до оси вращения $d = 10$ см. Считайте, что из сопла выходит насыщенный пар при атмосферном давлении, равном $p_0 = 10^5$ Па. Трением в оси и сопротивлением воздуха можно пренебречь.



1. Определите момент сил, действующих на шар со стороны пара, если шар зафиксирован.
2. Какое максимальное количество оборотов в минуту будет делать шар, если ему позволить свободно вращаться?

▲ **Решение.** **Что происходит.** Тепло горелки испаряет воду, и весь пар уходит через два сопла. Сколько пара выходит за секунду, задаёт мощность: каждый килограмм пара забирает удельную теплоту парообразования. Насыщенный пар при атмосферном давлении имеет известную плотность, а значит, по расходу и сечению сопла находим скорость струи. Струя уносит импульс — по второму закону Ньютона на сопло действует реактивная сила. Когда шар раскручивается, скорость пара относительно земли уменьшается; шар перестаёт разгоняться, когда пар выходит относительно земли с нулевой скоростью. Класс задачи — реактивная сила при движении с переменной массой (поток импульса струи).

Обозначения. μ_t — масса пара, выходящая из одного сопла за единицу времени (массовый расход); u — скорость пара относительно сопла; ρ — плотность пара в сопле; $L = 2{,}26 \cdot 10^6$ Дж/кг — удельная теплота парообразования воды; $T_0 = 373$ К — температура кипения при p_0; $M_\text{в} = 0{,}018$ кг/моль — молярная масса воды; $R = 8{,}31$ Дж/(моль·К); ω — угловая скорость шара.

Пункт 1.

1. Расход пара. Режим установившийся: котёл не накапливает пар, сколько испарилось, столько и вышло. За время Δt испаряется масса $P\Delta t/L$, и она делится поровну между двумя соплами:

$$\mu_t = \frac{P}{2L} = \frac{10^3}{2 \cdot 2{,}26 \cdot 10^6}\ \text{кг/с} \approx 2{,}2 \cdot 10^{-4}\ \text{кг/с}.$$

Нагрев воды до кипения здесь не учитываем: он был до начала работы, в установившемся режиме тепло идёт только на испарение.

2. Плотность пара в сопле. Насыщенный пар при $p_0 = 10^5$ Па имеет температуру кипения $T_0 = 373$ К. Считаем его идеальным газом, уравнение Менделеева–Клапейрона $p_0 = \dfrac{\rho}{M_\text{в}} RT_0$ даёт

$$\rho = \frac{p_0 M_\text{в}}{RT_0} = \frac{10^5 \cdot 0{,}018}{8{,}31 \cdot 373}\ \text{кг/м}^3 \approx 0{,}58\ \text{кг/м}^3.$$

3. Скорость струи. За время Δt через сечение S проходит цилиндр пара длиной $u\Delta t$ (рис. 1), его масса $\rho S u \Delta t = \mu_t \Delta t$:

$$u = \frac{\mu_t}{\rho S} = \frac{PRT_0}{2Lp_0M_\text{в}S} \approx \frac{2{,}2 \cdot 10^{-4}}{0{,}58 \cdot 10^{-5}} \text{ м/с} \approx 38 \text{ м/с}.$$

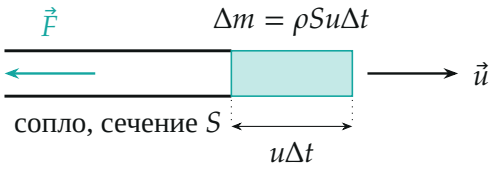

Рис. 1. За время Δt из сопла выходит цилиндр пара длиной $u\Delta t$; на сопло действует реактивная сила $\vec{F}$ против струи

4. Реактивная сила. Возьмём пар, вышедший за Δt. В шаре он покоился (скорость пара внутри шара мала: шар широкий), на выходе имеет скорость u. По второму закону Ньютона в импульсной форме сопло действовало на него силой $\Delta m\, u/\Delta t = \mu_t u$, и по третьему закону пар давит на сопло такой же силой в обратную сторону:

$$F = \mu_t u = \rho S u^2 \approx 2{,}2 \cdot 10^{-4} \cdot 38 \text{ Н} \approx 8{,}4 \cdot 10^{-3} \text{ Н}.$$

Давление на срезе сопла равно наружному p_0, поэтому добавки от разности давлений нет.

5. Момент сил. Два сопла смотрят в противоположные стороны, струи направлены по касательной к окружности радиуса d (рис. 2), силы F образуют пару с плечом d у каждой:

$$M_0 = 2Fd = 2\mu_t u d = \frac{P^2RT_0d}{2Sp_0M_\text{в}L^2} \approx 2 \cdot 8{,}4 \cdot 10^{-3} \cdot 0{,}1 \text{ Н·м} \approx 1{,}7 \cdot 10^{-3} \text{ Н·м}.$$

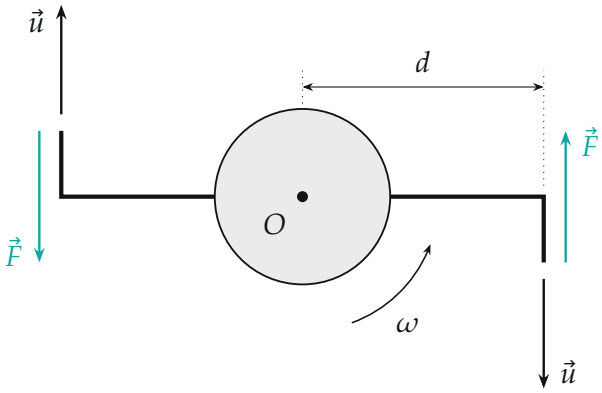

Рис. 2. Вид сверху на шар: струи по касательной, реактивные силы образуют пару с плечами d и крутят шар против часовой стрелки

Пункт 2.

6. Момент при вращении. Шар крутится с угловой скоростью ω, сопло движется со скоростью ωd навстречу струе. Скорость пара относительно сопла по-прежнему u: расход и плотность те же, а их задаёт только кипение. Относительно земли пар уходит со скоростью $u - \omega d$ (рис. 3). Момент силы на шар найдём по изменению момента импульса пара: в шар пар входит вдоль оси, его момент импульса относительно оси равен нулю, а уходит с моментом $\Delta m\,(u - \omega d)\,d$. По закону изменения момента импульса пара (а по третьему закону — такой же момент обратного знака действует на шар):

$$M(\omega) = 2\mu_t\,(u - \omega d)\,d = M_0\left(1 - \frac{\omega d}{u}\right).$$

Момент линейно убывает с ростом ω (рис. 4).

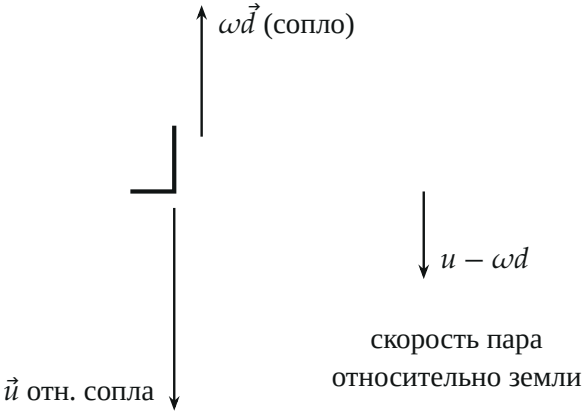

Рис. 3. Скорость пара относительно земли — сумма скорости относительно сопла $\vec{u}$ и скорости самого сопла ωd

7. Предельная скорость вращения. Трения нет, значит шар разгоняется, пока момент пара не обратится в ноль. Это происходит, когда $u - \omega d = 0$: пар выходит относительно земли без скорости и ничего не уносит. Отсюда

$$\omega_{\max} = \frac{u}{d} \approx 381\ \text{с}^{-1}, \qquad n_{\max} = \frac{60\ \text{с/мин}}{2\pi}\,\omega_{\max} = \frac{15PRT_0}{\pi p_0 M_\text{в} LSd},$$

$$n_{\max} \approx \frac{60}{2\pi} \cdot 381\ \text{об/мин} \approx 3{,}6 \cdot 10^3\ \text{об/мин}.$$

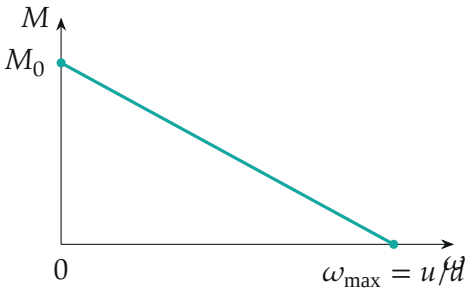

Рис. 4. Момент сил пара убывает линейно и обращается в ноль при $\omega_{\max}$

Обратите внимание. Скорость пара относительно сопла от вращения не зависит: её задают расход (мощность горелки) и плотность пара. Вращение меняет только скорость пара относительно земли, а импульс, уносимый струёй, считается в неподвижной системе.

Проверка. Размерность: $\mu_t u\, d$ — (кг/с)·(м/с)·м = Н·м; u/d — с^{-1}. Второй способ для момента: $M_0 = 2\rho S u^2 d = 2 \cdot 0{,}58 \cdot 10^{-5} \cdot 38{,}1^2 \cdot 0{,}1 \approx 1{,}7 \cdot 10^{-3}$ Н·м. Связь пунктов: $M_0 = 2\mu_t d \cdot \omega_{\max} d$ — момент линейно убывает от M_0 до нуля, как на рис. 4. У организаторов ответы $1{,}8 \cdot 10^{-3}$ Н·м и 3700 об/мин; формулы совпадают, разница в несколько процентов — от округления L (с $L \approx 2{,}2 \cdot 10^6$ Дж/кг выходят их числа).

Смысл: сила от струи пара мала (меньше сотой ньютона), но трения нет, и лёгкий шар раскручивается до тысяч оборотов в минуту — пока края сопел не «догонят» собственную струю.

Ответ. 1) $M_0 = \dfrac{P^2 R T_0 d}{2 S p_0 M_\text{в} L^2} \approx 1{,}7 \cdot 10^{-3}$ Н·м; 2) $n_{\max} = \dfrac{15 P R T_0}{\pi p_0 M_\text{в} L S d} \approx 3{,}6 \cdot 10^3$ об/мин ($L = 2{,}26$ МДж/кг, $T_0 = 373$ К).