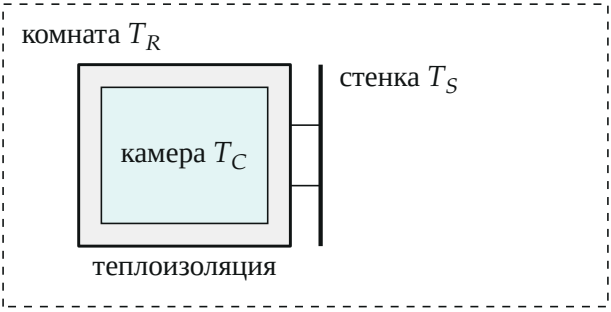
Морозильник с горячей стенкой

Задача 5. [МОШ 2019/20, 10 класс, задача 5] Задняя стенка не очень современного морозильника, на которой располагаются трубки конденсатора холодильной машины, работающей по обращённому циклу Карно, греется, так что её средняя температура T_S в рабочем режиме выше температуры в комнате T_R. Внутри морозильной камеры холодильная машина поддерживает среднюю температуру $T_C = -23\,^\circ\mathrm{C}$.

Известно, что в стационарном режиме, когда температура задней стенки и температура в камере установились, а температура в комнате не меняется со временем, мотор компрессора этого не очень современного морозильника работает без остановки.

В жару, когда температура в комнате поднимается до $T_R^{(0)} = +27\,^\circ\mathrm{C}$, задняя стенка нагревается до $T_S^{(0)} = +47\,^\circ\mathrm{C}$. Определите температуру задней стенки морозильника зимой в холодный день, когда температура воздуха в комнате уменьшается до значения $T_R^{(1)} = +17\,^\circ\mathrm{C}$.

Мощность передачи тепла от горячего тела холодному (например, от воздуха в комнате холодильной камере через теплоизоляцию) пропорциональна разности соответствующих температур.



Поясняющий рисунок: камера в теплоизоляции, сзади — горячая стенка с трубками конденсатора

▲ **Решение. Что происходит.** Тепло из комнаты всё время просачивается в камеру через теплоизоляцию. Холодильная машина забирает это тепло из камеры и вместе с работой компрессора отдаёт стенке, а стенка

отдаёт его воздуху комнаты. В стационарном режиме все потоки постоянны: сколько тепла вошло в камеру, столько машина вынесла; сколько машина отдала стенке, столько стенка отдала комнате. Связь между теплом, взятым у холодного тела, и теплом, отданным горячему, задаёт обращённый цикл Карно между температурами T_C и T_S. Класс задачи — тепловые балансы в стационарном режиме плюс идеальная (обратимая) тепловая машина.

Обозначения. Температуры — в кельвинах: $T_C = 250$ K, $T_R^{(0)} = 300$ K, $T_S^{(0)} = 320$ K, $T_R^{(1)} = 290$ K. q_C — мощность, с которой тепло идёт из комнаты в камеру; q_S — мощность, которую стенка отдаёт комнате; N — мощность компрессора. k_1 и k_2 — коэффициенты теплопередачи изоляции и стенки ($q = k\Delta T$).

1. Тепловой баланс камеры. Температура в камере постоянна, значит машина отбирает ровно столько, сколько приходит через изоляцию:

$$q_C = k_1 (T_R - T_C).$$

2. Тепловой баланс стенки. Температура стенки постоянна: всё, что машина отдаёт стенке, стенка отдаёт комнате:

$$q_S = k_2 (T_S - T_R).$$

3. Обращённый цикл Карно. Машина берёт q_C у холодного тела при T_C и отдаёт q_S горячему при T_S (рис. 1). Для цикла Карно отношение теплот равно отношению температур (обратимый цикл, приведённые теплоты на изотермах равны):

$$\frac{q_S}{T_S} = \frac{q_C}{T_C}.$$

По закону сохранения энергии мощность компрессора $N = q_S - q_C = q_C \left(\frac{T_S}{T_C} - 1 \right)$; ни она, ни сами k_1, k_2 нам не понадобятся — войдёт только отношение k_1/k_2. То, что компрессор работает без остановки, и означает, что это равенство выполняется в каждый момент, а не в среднем за циклы включения.

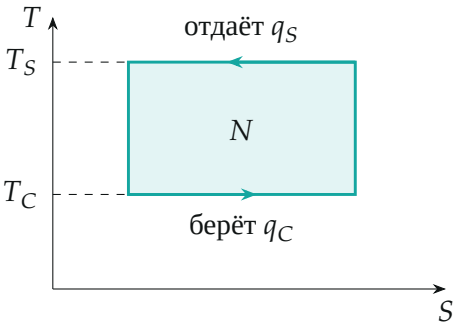


Рис. 1. Обращённый цикл Карно на диаграмме T–S: по нижней изотерме тепло забирается из камеры, по верхней отдаётся стенке; площадь цикла — работа компрессора

4. Уравнение для температуры стенки. Подставим балансы в соотношение Карно:

$$\frac{k_2(T_S - T_R)}{T_S} = \frac{k_1(T_R - T_C)}{T_C} \quad \Rightarrow \quad 1 - \frac{T_R}{T_S} = \frac{k_1}{k_2}\left(\frac{T_R}{T_C} - 1\right).$$

5. Отношение коэффициентов из летнего режима. При $T_R^{(0)} = 300$ K, $T_S^{(0)} = 320$ K:

$$\frac{k_1}{k_2} = \frac{1 - 300/320}{300/250 - 1} = \frac{1/16}{1/5} = \frac{5}{16}.$$

Потоки летом (в единицах $k_2 \cdot 1$ K): $q_C = \frac{5}{16} \cdot 50 \approx 15{,}6$, $q_S = 20$, $N \approx 4{,}4$ (рис. 2).

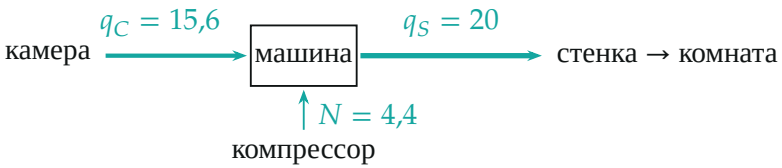


Рис. 2. Потоки энергии летом; длины стрелок пропорциональны мощностям: $q_S = q_C + N$

6. Зима. При $T_R^{(1)} = 290$ К:

$$1 - \frac{T_R^{(1)}}{T_S^{(1)}} = \frac{5}{16}\left(\frac{290}{250} - 1\right) = \frac{5}{16} \cdot 0{,}16 = 0{,}05,$$

$$T_S^{(1)} = \frac{T_R^{(1)}}{0{,}95} = \frac{290}{0{,}95}\ \text{К} \approx 305{,}3\ \text{К} \approx 32{,}3\,^\circ\text{C}.$$

Стенка теплее комнаты на 15,3 К — меньше, чем летом (20 К): тепла через изоляцию идёт меньше, и машине надо отдавать меньше.

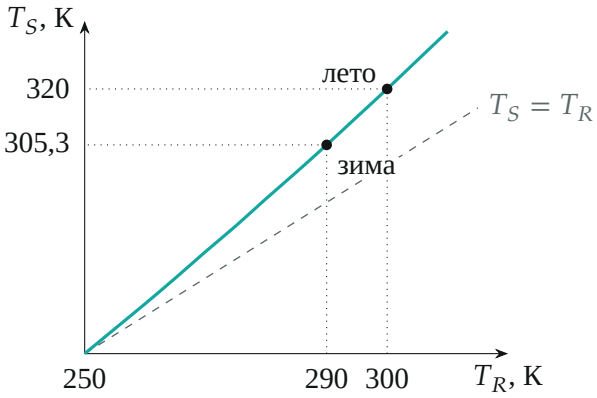


Рис. 3. Температура стенки в зависимости от температуры комнаты при $k_1/k_2 = 5/16$; при $T_R = T_C$ потоков нет и $T_S = T_R$

Обратите внимание. Температуры в формуле Карно — только абсолютные. Разности температур в балансах можно брать в градусах Цельсия, а отношения T_R/T_C и T_R/T_S — нет: с градусами Цельсия $T_C = -23$ дало бы бессмыслицу.

Проверка. Подставим ответ в исходные уравнения: $q_C = \frac{5}{16} \cdot 40 = 12{,}5$, $q_S = 15{,}26$; $q_S/T_S = 15{,}26/305{,}3 = 0{,}0500$ и $q_C/T_C = 12{,}5/250 = 0{,}0500$ — соотношение Карно выполнено. Предел: при $T_R \to T_C$ тепло в камеру не идёт, машине нечего выносить, и стенка остывает до комнатной температуры (рис. 3). Размерность: обе части уравнения шага 4 безразмерны.

Смысл: стенка морозильника — своеобразный термометр нагрузки: чем теплее в комнате, тем больше тепла приходится выносить из камеры и тем сильнее греется стенка.

Ответ. $T_S^{(1)} = \dfrac{T_R^{(1)}}{1 - \dfrac{k_1}{k_2}\left(\dfrac{T_R^{(1)}}{T_C} - 1\right)}$, где $\dfrac{k_1}{k_2} = \dfrac{1 - T_R^{(0)}/T_S^{(0)}}{T_R^{(0)}/T_C - 1} = \dfrac{5}{16}$;

$T_S^{(1)} \approx 305{,}3\ \text{K} \approx 32{,}3\ ^\circ\text{C}$.