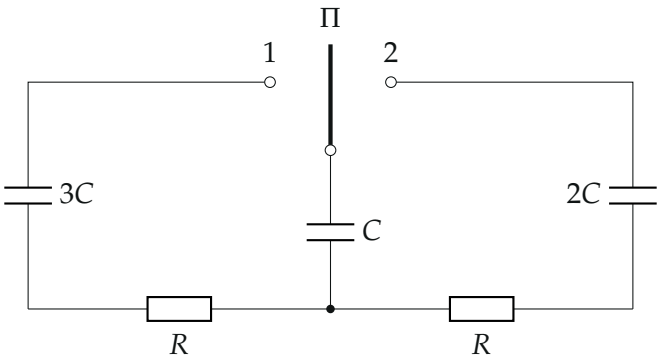
Конденсаторы

Задача 1. [МОШ 2019/20, 11 класс, задача 1] В цепи, схема которой изображена на рисунке, в начальный момент времени конденсатор ёмкостью $3C = 300$ мкФ заряжен до напряжения $U_0 = 12$ В, конденсаторы ёмкостью C и $2C$ не заряжены. Переключатель П в среднем положении.

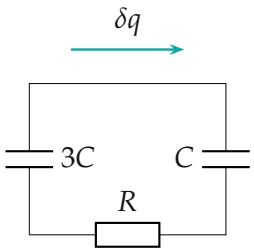


Переключатель П сначала перекидывают в положение 1 на короткое время (много меньшее RC), а затем в положение 2 на гораздо большее время. Определите заряды конденсаторов после многократного повторения этих двух операций. Найдите приближённо, какое количество теплоты выделяется в каждом из резисторов.

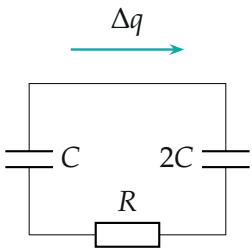
▲ **Решение. Что происходит.** Переключатель по очереди соединяет конденсатор C то с $3C$ через левый резистор, то с $2C$ через правый. Разумно начать с вопроса: что произойдёт за один цикл, а потом применить то же к следующему. Ключевое понятие — время установления RC: примерно за это время ток через резистор, заряжающий конденсатор, затухает, и напряжение на конденсаторе становится равным напряжению источника. В положении 1 времени мало ($\tau \ll RC$): конденсаторы выровняться не успевают, перетекает лишь небольшая порция заряда. В положении 2 времени много ($\gg RC$): C и $2C$ полностью выравнивают напряжения. Каждый цикл чуть разряжает $3C$ и чуть заряжает остальные, и так до тех пор, пока перетекать будет нечему, то есть пока напряжения на всех трёх конденсаторах не станут одинаковыми. Заряды

найдём из закона сохранения заряда, полную теплоту — из потерянной энергии конденсаторов, а делить её между резисторами будем оценкой за один цикл.

Обозначения. q_3, q, q_2 — заряды верхних обкладок конденсаторов $3C$, C, $2C$; напряжения на них $U_3 = q_3/3C$, $U = q/C$, $U_2 = q_2/2C$. Индекс ∞ — после многих повторений. Из условия $C = 100$ мкФ.



положение 1: время $\tau \ll RC$



положение 2: время $\gg RC$

Два состояния цепи. В каждом работает один контур с одним резистором; стрелка — заряд, перетекающий по верхнему проводу за одно пребывание переключателя в положении.

1. Один цикл. Возьмём момент перед очередным положением 1, когда напряжения на конденсаторах $3C$, C, $2C$ равны U_3, U, U (после положения 2 у C и $2C$ напряжения одинаковы; знак зарядов выбираем сами — верхняя обкладка $3C$ положительна, от выбора ответ не зависит).

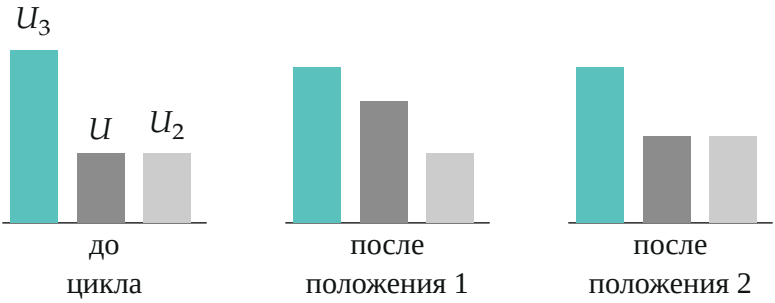
Положение 1. Контур из $3C$, C и левого резистора. Если бы переключатель стоял долго, C зарядился бы до U_3 и ток прекратился бы. Но $\tau \ll RC$, поэтому напряжение на резисторе $u = U_3 - U$ за это время почти не меняется, ток постоянен и равен u/R, а перетекает небольшой заряд

$$\delta q = \frac{u}{R}\,\tau, \qquad U_3 \to U_3 - \frac{\delta q}{3C}, \quad U \to U + \frac{\delta q}{C}.$$

Положение 2. Контур из C, $2C$ и правого резистора. Времени много больше RC, ток успевает затухнуть, и напряжения на C и $2C$ становятся равными. Конденсатор C перед этим получил лишнее напряжение

$\Delta U = \delta q/C$, поэтому заряд верхних обкладок C и $2C$, который сохраняется, равен $C(U + \Delta U) + 2CU$, а после выравнивания

$$3C\,U' = 3CU + C\,\Delta U \quad \Rightarrow \quad U' = U + \frac{\Delta U}{3}.$$



Напряжения на $3C$, C, $2C$ (слева направо в каждой тройке) за один цикл; порция заряда δq нарисована крупной для наглядности.

Итог цикла: $3C$ немного разрядился, а C и $2C$ немного зарядились.

2. Закон сохранения заряда. Верхние обкладки трёх конденсаторов связаны между собой только через переключатель, а с остальной цепью — лишь через сами конденсаторы. Поэтому суммарный заряд верхних обкладок не меняется за всё время. В начале заряжен один конденсатор $3C$:

$$q_3 + q + q_2 = 3CU_0.$$

Нижние обкладки образуют такую же замкнутую группу с суммарным зарядом $-3CU_0$ — то же уравнение.

3. Чем кончится процесс. Пока $U_3 > U$, каждое включение положения 1 отбирает заряд у $3C$ и отдаёт конденсатору C, а положение 2 передаёт его дальше, $2C$: U_3 только убывает, а U и U_2 только растут. Но так не может продолжаться бесконечно. Порция заряда в положении 1 пропорциональна разности, $\delta q = (U_3 - U)\tau/R$, а эта разность с каждым циклом уменьшается, значит, порции становятся всё меньше и в пределе $U_3 - U \to 0$. Тогда в положении 1 ток исчезает, конденсатор C заряд не получает, в положении 2 выравнивать нечего: цепь пришла

в стационарное состояние, и что бы ни делал переключатель, ничего не меняется. Это и есть

$$U_3 = U = U_2 = U_\infty.$$

Обратите внимание: за одно включение положения 1 конденсаторы $3C$ и C выровняться не успевают — время мало. Предел общий именно потому, что операции повторяют много раз.

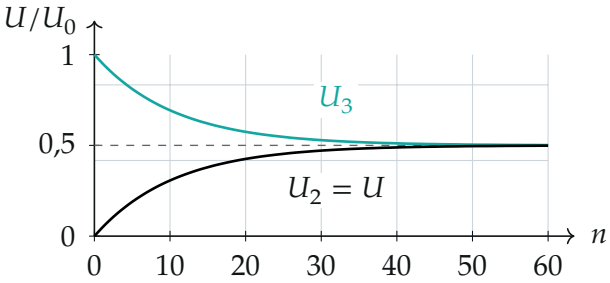
4. Заряды в конце. Все три напряжения равны U_∞, поэтому заряды равны $3CU_\infty$, CU_∞, $2CU_\infty$. Подставим в закон сохранения заряда:

$$(3C + C + 2C)\,U_\infty = 3CU_0 \quad \Rightarrow \quad U_\infty = \frac{U_0}{2}.$$

Отсюда

$$q_3 = \frac{3CU_0}{2} = 1{,}8 \text{ мКл},$$
$$q = \frac{CU_0}{2} = 0{,}6 \text{ мКл},$$
$$q_2 = CU_0 = 1{,}2 \text{ мКл}.$$

Сумма $1{,}8 + 0{,}6 + 1{,}2 = 3{,}6$ мКл равна начальному заряду $3CU_0$.



Напряжения после n-го цикла в единицах U_0: расчёт для $\tau = 0{,}15\,RC$ и $8\,RC$ в положении 2. Обе кривые идут к $U_0/2$.

5. Полная теплота. Источников нет, излучением пренебрегаем: энергия, потерянная конденсаторами, выделилась в резисторах. В начале

$W_0 = \dfrac{3CU_0^2}{2}$, в конце $W_\infty = \dfrac{6C}{2}\left(\dfrac{U_0}{2}\right)^2 = \dfrac{3CU_0^2}{4}$. Значит

$$Q = W_0 - W_\infty = \frac{3CU_0^2}{4} = \frac{3\cdot 10^{-4}\cdot 144}{4}\ \text{Дж} \approx 1{,}1\cdot 10^{-2}\ \text{Дж}.$$

6. Как теплота делится между резисторами. Рассмотрим один цикл вдали от начала, когда U_3 и $U = U_2$ почти не меняются.

Энергия, потерянная конденсаторами за один цикл, равна теплоте за цикл (источников нет). Посчитаем её двумя способами; второй показывает, какой порядок малости нужно сохранить.

Положение 1. Прямо: напряжение на резисторе $u = U_3 - U$ почти постоянно, ток u/R, теплота в левом резисторе $Q_\text{л} = \dfrac{u^2}{R}\tau = u\,\delta q$. Через энергию: теплота равна убыли энергии двух конденсаторов,

$$\begin{aligned} Q_\text{л} &= \frac{(3CU_3)^2}{6C} + \frac{(CU)^2}{2C} - \frac{(3CU_3 - \delta q)^2}{6C} - \frac{(CU + \delta q)^2}{2C} \\ &= \delta q\,(U_3 - U) - \frac{2\,\delta q^2}{3C} \approx u\,\delta q, \end{aligned}$$

потому что δq много меньше $3CU_3$ и CU, и слагаемое с δq^2 отбрасываем.

Положение 2. К началу этого положения напряжение U выросло на $\Delta U = \delta q/C$ и превышает $U_2 = U$ только на эту малую величину. За время $\gg RC$ конденсаторы C и $2C$ выравниваются, и в правом резисторе выделяется теплота, равная убыли их энергии:

$$Q_\text{пр} = \frac{C(U + \Delta U)^2}{2} + \frac{2CU^2}{2} - \frac{3CU'^2}{2} = \frac{C}{3}\Delta U^2 = \frac{\delta q^2}{3C}.$$

Слагаемые первого порядка по ΔU здесь сокращаются: $CU\Delta U - 3CU\cdot\Delta U/3 = 0$. Если отбросить ΔU^2 сразу, получится $Q_\text{пр} = 0$, а это неверно — теплота выделяется. Значит, малость второго порядка здесь отбрасывать нельзя, и нужно честно оставить ΔU^2. В положении 1, наоборот, первый порядок $u\,\delta q$ не нулевой, и δq^2 можно отбросить.

Отношение за цикл:

$$\frac{Q_{\text{пр}}}{Q_{\text{л}}} = \frac{\delta q^2/3C}{u\,\delta q} = \frac{\delta q}{3Cu} = \frac{\tau}{3RC} \ll 1.$$

Значит почти вся теплота выделяется в левом резисторе:

$$Q_1 \approx Q = \frac{3CU_0^2}{4} \approx 1{,}1 \cdot 10^{-2}\ \text{Дж}, \qquad Q_2 \approx 0.$$

Обратите внимание: в положении 1 теплота равна $u\,\delta q$, а не $\frac{1}{2}u\,\delta q$: напряжение на резисторе почти не падает за короткое время, поэтому формула «половина» для полной перезарядки здесь не работает.

Проверка. Размерность: CU^2 — джоуль. Предел: если бы время в положении 1 было велико ($\tau \gg RC$), то отношение $Q_{\text{пр}}/Q_{\text{л}}$ стало бы порядка единицы, а конечные заряды остались бы теми же — их определяет только закон сохранения заряда. Расчёт по точным формулам с $\tau = 0{,}05\,RC$ даёт $Q_{\text{пр}}/Q_{\text{л}} = 0{,}0167 = \tau/3RC$ и $Q_{\text{л}} + Q_{\text{пр}} = \frac{3}{4}CU_0^2$, как в оценке.

Физический смысл такой: левый резистор рассеивает энергию пропорционально перетёкшей порции заряда δq, правый — пропорционально δq^2. Пока порция мала, почти всё тепло выделяется слева. Расхождение с ответом организаторов: их числа (5,4; 1,8; 3,6 мКл) получаются при $C = 300$ мкФ, а в условии в их же PDF $3C = 300$ мкФ, то есть $C = 100$ мкФ, — верны числа выше.

Ответ. $q_3 = \dfrac{3CU_0}{2} = 1{,}8$ мКл, $q = \dfrac{CU_0}{2} = 0{,}6$ мКл, $q_2 = CU_0 = 1{,}2$ мКл; $Q_1 \approx \dfrac{3CU_0^2}{4} \approx 1{,}1 \cdot 10^{-2}$ Дж, $Q_2 \approx 0$.