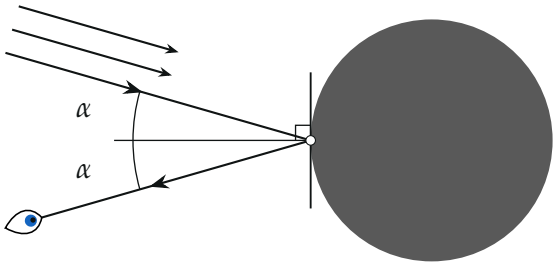
Изображения в шаре

Задача 3. [МОШ 2019/20, 11 класс, задача 3] Наблюдатель видит изображение Солнца в полированном металлическом шаре. Угловая высота Солнца над горизонтом равна α и равна углу между линией зрения и горизонтальной нормалью к шару. Определите характерный размер изображения Солнца, если радиус шара равен R, а угловой размер Солнца равен φ ($\varphi \ll \alpha$).

Примечание. Для малого угла φ справедливы приближённые формулы: $\cos\varphi \approx 1$, $\sin\varphi \approx 1$.



▲ **Решение.** **Что происходит.** Шар работает как выпуклое зеркало, Солнце — как бесконечно далёкий источник: от каждой точки диска идёт свой параллельный пучок. Наблюдатель тоже далеко. Угол α неизвестно малый ли (малым считается только φ), поэтому решаем для любого α от 0 до 90°. Идея в три шага. Сначала выясняем, как поворачивается отражённый луч, если повернуть падающий луч или само зеркало. Затем по этому находим, где за поверхностью шара кажется находящейся одна точка Солнца: расстояние ρ от точки отражения до мнимого изображения. Наконец, угловой размер Солнца φ превращаем в размер пятна: изображение видно под тем же углом φ с расстояния ρ, то есть $\Delta L = \rho\varphi$.

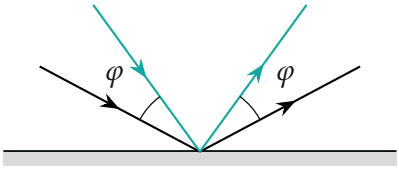
Обозначения. Плоскость рисунка — вертикальная плоскость через центр шара O, Солнце и наблюдателя. P_0 — точка отражения для центра Солнца, нормаль в ней горизонтальна; ρ — расстояние от P_0 до мнимого изображения точки Солнца; ΔL — размер изображения, как его видит

наблюдатель: расстояние между краями пятна в плоскости, перпендикулярной линии зрения.

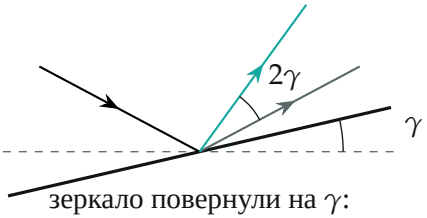
1. Как поворачивается отражённый луч. Два факта о плоском зеркале, на которых держится вся задача.

Поворот падающего луча. Луч падает на горизонтальное зеркало под углом α к горизонту и отражается под тем же углом. Повернём падающий луч на малый угол φ, так что он идёт под углом $\alpha + \varphi$ к горизонту. Закон отражения даст отражённый луч под углом $\alpha + \varphi$ по другую сторону нормали: он тоже повернулся на φ.

Поворот зеркала. Теперь падающий луч оставим, а зеркало повернём на угол γ. Вместе с ним на γ повернулась нормаль, значит, угол падения стал $\alpha + \gamma$ и угол отражения тоже $\alpha + \gamma$. Отражённый луч составляет с нормалью $\alpha + \gamma$, а сама нормаль повернулась на γ, поэтому относительно прежнего направления он повернулся на 2γ. Отражённый луч поворачивается вдвое сильнее, чем зеркало.



луч повернули на φ:
отражённый — на φ



зеркало повернули на γ:
отражённый — на 2γ

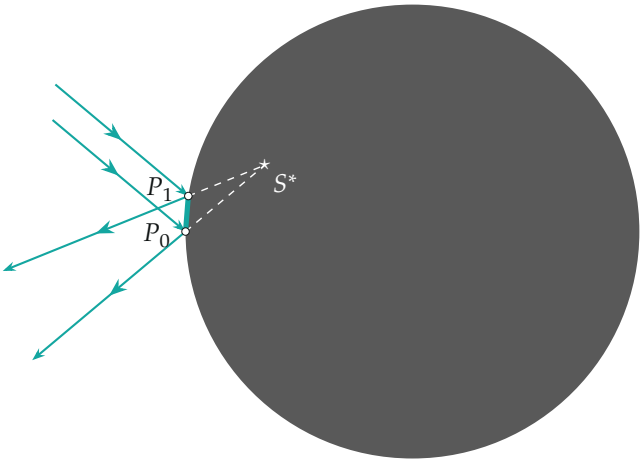
Слева: падающий луч повёрнут на φ при неподвижном зеркале — отражённый повернулся на φ. Справа: падающий луч неподвижен, зеркало повёрнуто на γ — отражённый (бирюзовый) повернулся на 2γ. Углы нарисованы крупными.

2. Где виден один точечный источник. Солнце далеко, лучи от одной его точки параллельны. Они падают на шар в разных местах, и нормаль в соседних точках P_0 и P_1 повёрнута на малый угол γ (расстояние $P_0P_1 \approx R\gamma$). По второму факту (зеркало повёрнуто на γ) отражённые лучи после этого расходятся на 2γ. Наблюдатель видит источник там, где пересекаются продолжения отражённых лучей назад: это мнимая точка S^* за поверхностью. Рассмотрим треугольник $P_0P_1S^*$: сторона $P_0P_1 \approx R\gamma$, угол при S^* равен 2γ, угол при P_1 равен $90° + \alpha$ (угол

при P_0 между касательной и продолжением луча равен $90^\circ - \alpha$). Стороны P_0S^* и P_1S^* различаются на ничтожную величину, обе равны ρ. По теореме синусов

$$\frac{R\gamma}{\sin 2\gamma} = \frac{\rho}{\sin(90^\circ + \alpha)} \quad \Rightarrow \quad \rho = \frac{R\gamma\cos\alpha}{\sin 2\gamma} \approx \frac{R\gamma\cos\alpha}{2\gamma} = \frac{R\cos\alpha}{2},$$

потому что $\gamma \ll 1$ и $\sin 2\gamma \approx 2\gamma$.



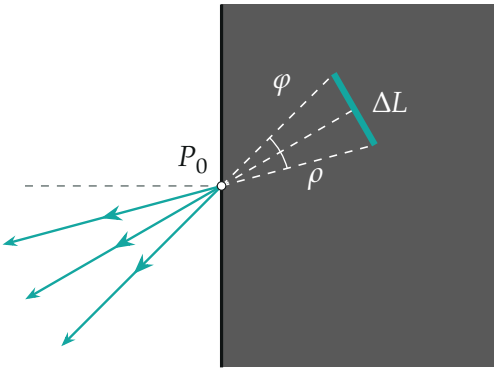
Два соседних луча от одной точки Солнца: после отражения они расходятся, как из мнимой точки S^* за поверхностью. Угол γ увеличен.

3. Размер изображения. Угловой размер Солнца φ — угол между направлениями на его противоположные края из точки наблюдения. Лучи от края диска идут под углом $\varphi/2$ к лучам от центра. Возьмём для центра Солнца пучок, отражающийся в P_0, и повернём падающий луч на $\varphi/2$ — он станет лучом от края. Нормаль в P_0 при этом не изменилась, и по первому факту отражённый луч тоже повернулся на $\varphi/2$. Продолжение этого луча назад проходит через точку изображения края на расстоянии ρ от P_0 (расстояние то же с точностью до малых поправок). Значит, радиус пятна равен $\rho \cdot \varphi/2$, диаметр — в два раза больше, то есть изображение видно с расстояния ρ под угловым размером φ — так, как будто

это уменьшенная копия Солнца:

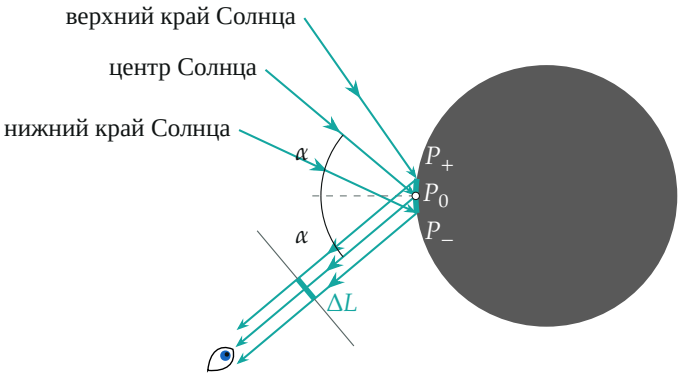
$$\Delta L = 2 \cdot \rho \cdot \frac{\varphi}{2} = \rho\varphi = \frac{R\cos\alpha}{2}\,\varphi.$$

Условие $\varphi \ll \alpha$ нужно, чтобы угол между нормалью и линией зрения вдоль всего пятна почти не менялся и ρ можно было считать общим.



Лучи, повёрнутые на $\varphi/2$ в обе стороны, отражаются от P_0 веером; продолжения назад (пунктир) длиной ρ показывают, откуда они кажутся идущими. Бирюзовая дуга — изображение Солнца, угол φ увеличен.

Второй способ: сдвиг точки отражения. Ход лучей другой, ответ тот же. Пусть $\vec{s}$ и $\vec{d}$ — единичные векторы от шара к Солнцу и к наблюдателю: высота $\vec{s}$ над горизонтом равна α, высота $\vec{d}$ равна $-\alpha$ (линия зрения составляет угол α с горизонтальной нормалью).



Ход лучей для центра и краёв Солнца. Угол φ на рисунке увеличен: на деле $\varphi \approx 0{,}5°$. Бирюзовая дуга — участок шара, на котором отражаются все лучи, идущие к наблюдателю; серый отрезок — плоскость, перпендикулярная линии зрения.

а) Центр Солнца. По закону отражения нормаль делит угол между $\vec{s}$ и $\vec{d}$ пополам; для центра Солнца он равен 2α, и нормаль в P_0 горизонтальна.

б) Край Солнца: куда сдвигается точка отражения. Луч от края диска идёт под высотой $\alpha + \delta$, где $\delta = \pm\varphi/2$ — угол между направлением на край и на центр. Направление на наблюдателя то же, высота $-\alpha$. Нормаль направлена по биссектрисе, высота биссектрисы равна полусумме высот:

$$\frac{(\alpha + \delta) + (-\alpha)}{2} = \frac{\delta}{2}.$$

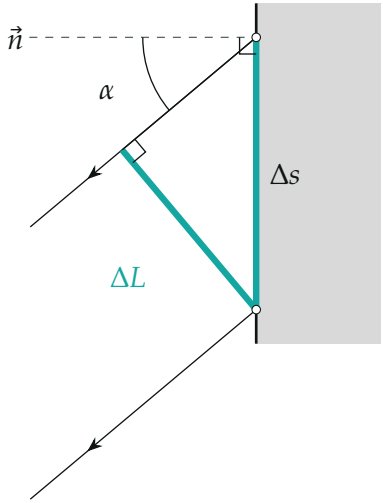
Нормаль у шара идёт вдоль радиуса, поэтому радиус, проведённый в новую точку отражения, повёрнут на $\delta/2$ относительно горизонтали. Края Солнца $\delta = \pm\varphi/2$ дают две точки P_+ и P_- на радиусах, повёрнутых на $\pm\varphi/4$. Длина дуги между ними

$$\Delta s = R \cdot \left(\frac{\varphi}{4} + \frac{\varphi}{4}\right) = \frac{R\varphi}{2}.$$

Обратите внимание: нормаль поворачивается на $\delta/2$, а не на δ (второй факт пункта 1); с δ ответ вышел бы вдвое больше.

в) Проекция. Дуга $\Delta s \ll R$ — почти отрезок касательной в P_0. Касательная перпендикулярна нормали, плоскость, перпендикулярная линии зрения, — вектору $\vec{d}$, а между нормалью и $\vec{d}$ угол α; значит, отрезок наклонён к этой плоскости на α и проецируется в $\Delta s \cos\alpha$:

$$\Delta L = \Delta s \cos\alpha = \frac{R\cos\alpha}{2}\,\varphi.$$



Проекция отрезка касательной Δs на плоскость, перпендикулярную линии зрения (серая линия). Лучи к наблюдателю параллельны, угол между нормалью $\vec{n}$ и ними равен α, поэтому $\Delta L = \Delta s \cos\alpha$.

Проверка. Размерность: $R\varphi$ — длина. Предел $\alpha \to 0$: $\Delta L = R\varphi/2$ — как у сферического зеркала с фокусным расстоянием $R/2$ (изображение размера $F\varphi$). Предел $\alpha \to 90°$: $\Delta L \to 0$ — сдвиг точки отражения по шару идёт почти вдоль линии зрения и не виден. Численный расчёт отражения лучей для $\varphi = 1°$ даёт $\Delta L/(R\varphi) = 0{,}4924$ при $\alpha = 10°$, 0,3830 при 40°, 0,1710 при 70° — это $\frac{1}{2}\cos\alpha$ с точностью до четвёртого знака.

Замечание: в направлении, перпендикулярном плоскости рисунка, пятно не сокращается, а растягивается: $R\varphi/(2\cos\alpha)$ (такой же расчёт для лучей из боковых точек диска). Изображение Солнца в шаре — эллипс, а ответ задачи — его размер в вертикальной плоскости: при косом падении фокусное расстояние шара в плоскости падения, $R\cos\alpha/2$, короче, чем в перпендикулярной.

Ответ. $\Delta L = \dfrac{R\cos\alpha}{2}\,\varphi.$