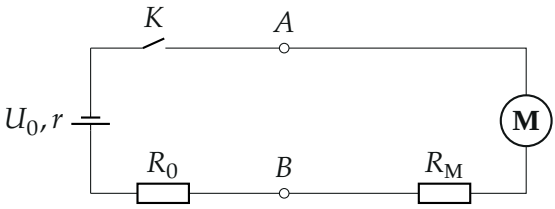
Модели стартёра

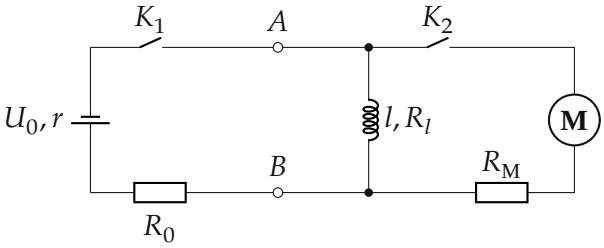
Задача 4. [МОШ 2019/20, 11 класс, задача 4] На рисунке изображена простейшая модельная схема подключения электродвигателя (автомобильного стартёра) к аккумулятору.



Параметр схемы $R_M = 2 \cdot 10^{-2}$ Ом моделирует сопротивление обмоток якоря двигателя, r и R_0 — внутреннее сопротивление аккумулятора с ЭДС $U_0 = 12$ В и сопротивление проводов, при этом $R_0 + r = 10^{-2}$ Ом. Можно считать, что ЭДС индукции, вырабатываемая электродвигателем, пропорциональна угловой скорости вращения вала $|\mathcal{E}_i| = k\omega$, а момент сил, действующих на вал со стороны магнитного поля, пропорционален току $M = kI$. Для упрощения расчётов далее полагаем, что вал электродвигателя не нагружен.

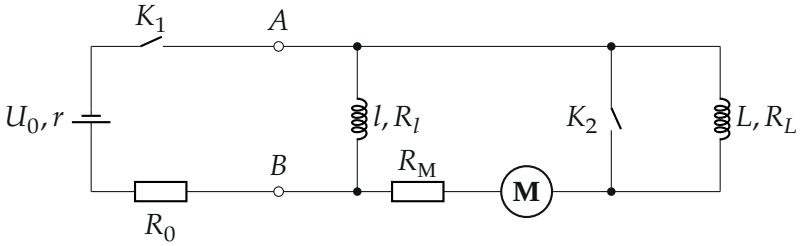
1. Найдите напряжение U_{AB} на клеммах электродвигателя (между т. A и т. B) сразу после замыкания ключа, а также максимальное значение силы тока в цепи. Чему равен ток в момент, когда угловая скорость вращения вала составляет 75% от максимального значения? (*3 балла*)

Другая модельная схема (рис. ниже) учитывает наличие в конструкции удерживающей обмотки втягивающего реле, R_l — сопротивление катушки индуктивностью l. При включении сначала замыкается ключ K_1, а когда ток через катушку установится, замыкается ключ K_2.



2. Считая, что отношение $\alpha = \dfrac{R_l}{r + R_0}$ известно ($\alpha > 1$), определите максимальное значение тока через двигатель в этом случае. (*4 балла*)
3. При выключении электродвигателя (после того, как скорость вращения вала установится) сначала размыкают ключ K_1. При этом напряжение на клеммах двигателя почти мгновенно увеличивается на $\Delta U_{AB} = 2$ В. Определите по этим данным параметр α. (*3 балла*)

Наиболее близка к реальному устройству схема, изображённая на третьем рисунке. Ключи изначально разомкнуты. Поворот ключа зажигания соответствует замыканию ключа K_1. Когда ток через катушку L достигает некоторого порогового значения $I_П$ замыкается ключ K_2 (магнитное поле катушки втягивает шток, замыкающий контакты ключа K_2).



4. Индуктивность второй катушки L и её сопротивление R_L таковы, что выполняются равенства: $L = 10l$, $R_l = 5R_L$. Известно, что значение тока $I_П$ лежит между 10 А и 20 А. Чему равен ток через катушку индуктивности l в момент замыкания ключа K_2? Численное значение параметра α считайте известным из п. 3). (*2 балла*)

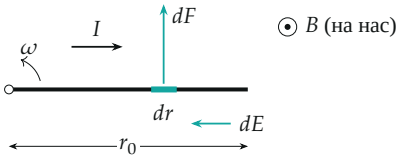
▲ **Решение. Что происходит.** Двигатель — вал с проводником в магнитном поле, и в нём работают два эффекта. Во-первых, ток в поле даёт силу Ампера и момент $M = kI$, который раскручивает вал. Во-вторых, проводник, вращаясь в поле, порождает ЭДС индукции $E = k\omega$. Эта ЭДС обязана быть направлена *против* питания. Иначе ЭДС усиливала бы ток, ток — разгон, разгон — ЭДС, и так без конца: вечный двигатель. Значит, чем быстрее вал, тем меньше ток; разгон кончается, когда ток падает до нуля. Катушка — «инерция тока»: её ток скачком не меняется. Класс задачи — переходные процессы: в каждом состоянии цепи берём то, что скачком не меняется (ω, а с ней E, и ток катушки), остальное — по правилам Кирхгофа.

Обозначения. $R_s = r + R_0 = 10^{-2}$ Ом — батарея с проводами, всегда последовательно с U_0. $E = k\omega$ — ЭДС двигателя, $\omega_{\max}$ — установившаяся скорость. I_l, I_M, I_L — токи через катушку l, двигатель и катушку L.

Модель двигателя. Откуда $M = kI$ и $E = k\omega$ с одним и тем же k. Вал — проводящий стержень радиуса r_0 в однородном поле B, перпендикулярном плоскости рисунка. Возьмём малый кусок dr на расстоянии r от оси. Если по стержню течёт ток I, на кусок действует сила Ампера $dF = BI\,dr$ с моментом $dM = r\,dF$; если стержень вращается с ω, кусок движется со скоростью ωr и на нём ЭДС $dE = B\omega r\,dr$. Суммируя по кускам,

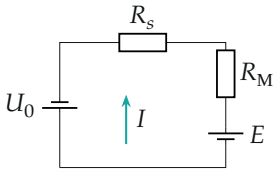
$$M = BI\int_0^{r_0} r\,dr = \frac{Br_0^2}{2}\,I, \qquad E = B\omega\int_0^{r_0} r\,dr = \frac{Br_0^2}{2}\,\omega.$$

Оба коэффициента равны $k = Br_0^2/2$, и это согласуется с условием.



Вал-стержень в поле B, вид сверху: на кусок dr с током I действует сила dF (она раскручивает вал), а вращение с ω даёт на этом куске ЭДС dE, направленную против тока.

В схеме двигатель — это последовательно резистор R_M (обмотки) и источник $E = k\omega$, включённый навстречу батарее.



Двигатель в схеме: обмотка R_M и ЭДС $E = k\omega$ против U_0; $R_s = r + R_0$.

Пункт 1. *Начало.* Вал неподвижен, $\omega = 0$, $E = 0$: двигатель — резистор R_M. Закон Ома для замкнутой цепи и напряжение на R_M:

$$I_\text{max} = \frac{U_0}{R_s + R_\text{M}} = \frac{12}{0{,}03}\ \text{А} = 400\ \text{А}, \qquad U_{AB}(0) = I_\text{max} R_\text{M} = 8\ \text{В}.$$

Дальше ток $I = (U_0 - k\omega)/(R_s + R_\text{M})$ только убывает — линейно по ω.

Максимальная скорость. Вал не нагружен, на него действует только момент $M = kI$. Пока ток есть, вал разгоняется; скорость перестаёт расти при $M = 0$, то есть $I = 0$, откуда $k\omega_\text{max} = U_0$. При $0{,}75\,\omega_\text{max}$ ЭДС равна $0{,}75U_0 = 9$ В и

$$I = \frac{U_0 - E}{R_s + R_\text{M}} = \frac{12 - 9}{0{,}03}\ \text{А} = 100\ \text{А} = \frac{I_\text{max}}{4}.$$

Пункт 2. При замкнутом K_1 и разомкнутом K_2 цепь — батарея, R_s и катушка. Когда ток установился, напряжение на индуктивности $l\,\dot{I}$ равно нулю, и катушка — резистор $R_l = \alpha R_s$:

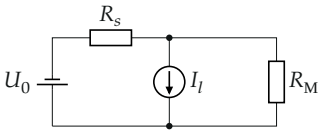
$$I_l = \frac{U_0}{R_s + R_l} = \frac{U_0}{R_s(1 + \alpha)}.$$

Сразу после замыкания K_2 ток катушки остаётся I_l, а двигатель неподвижен, $E = 0$ — это R_M. Катушка ведёт себя как источник тока I_l (рисунок а). Через батарею идёт $I_l + I_M$, и $U_{AB} = U_0 - R_s(I_l + I_M) = I_M R_\text{M}$.

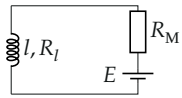
Отсюда $I_M(R_s + R_\text{M}) = U_0 - R_s I_l = U_0(1 - \frac{1}{1+\alpha})$ и

$$I_M = \frac{U_0}{R_s + R_\text{M}} \cdot \frac{\alpha}{1+\alpha}.$$

Это наибольший ток двигателя (дальше E растёт): при $\alpha = 11$ это 367 А против 400 А без катушки.



а) сразу после замыкания K_2



б) сразу после размыкания K_1

Эквивалентные схемы: катушка — источник тока I_l; в б) ЭДС двигателя E прежняя.

Пункт 3. Перед размыканием K_1 режим установившийся: вал вращается с постоянной ω, значит, момент $M = kI_M$ равен нулю и $I_M = 0$ — на R_M падения нет, и ЭДС уравновешивает напряжение на клеммах: $E = U_{AB} = I_l R_l$. Сразу после размыкания E прежняя (инерция ротора), ток катушки I_l тоже, и идёт он только через двигатель (рисунок б):

$$U'_{AB} = E - I_l R_\text{M}, \qquad \Delta U_{AB} = U'_{AB} - U_{AB} = -I_l R_\text{M} = -\frac{U_0 R_\text{M}}{R_s(1+\alpha)}.$$

Обратите внимание: напряжение по знаку уменьшается (11 В → 9 В), а условие называет скачок увеличением — неточность условия; важен модуль, 2 В:

$$1 + \alpha = \frac{U_0 R_\text{M}}{R_s \Delta U_{AB}} = \frac{12 \cdot 2 \cdot 10^{-2}}{10^{-2} \cdot 2} = 12 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 11.$$

Тогда $I_l = 100$ А.

Пункт 4. Пока K_2 разомкнут, ток идёт через R_s и дальше по двум ветвям: катушка l и ветвь «катушка L, R_M, двигатель» с током I_L. Двигатель

неподвижен, $E = 0$. Правило Кирхгофа для каждого контура:

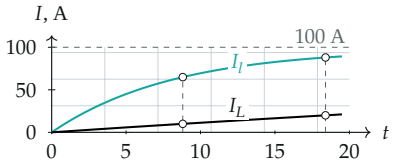
$$U_0 = R_s(I_l + I_L) + R_l I_l + l\dot{I}_l, \qquad U_0 = R_s(I_l + I_L) + (R_L + R_\text{M})I_L + L\dot{I}_L.$$

Систему решать в лоб громоздко, оценим характерные времена: $\tau_l \approx l/(R_l + R_s)$, $\tau_L \approx L/(R_L + R_\text{M} + R_s)$. При $\alpha = 11$ ($R_l = 0{,}11$ Ом, $R_L = 0{,}022$ Ом, $R_\text{M} = 0{,}02$ Ом) $\tau_l = l/(0{,}12\text{ Ом})$ и $\tau_L = 10l/(0{,}052\text{ Ом}) \approx 23\,\tau_l$.

Оценка организаторов. Ветвь l быстрее; если к срабатыванию реле её ток уже установился ($\dot{I}_l = 0$), то $U_0 = R_s I_L + (R_l + R_s)I_l$, а $R_s I_L = 0{,}1 \ldots 0{,}2$ В — 1–2 % от U_0, и

$$I_l \approx \frac{U_0}{R_l + R_s} = \frac{12}{0{,}12}\text{ А} = 100\text{ А}.$$

Почему эта оценка не проходит. Она верна, если к моменту $I_L = I_\Pi$ прошло много τ_l. Но I_Π — лишь 5–9 % от предела ветви L (около 210 А) и набирается за время порядка τ_l, а не τ_L, так что ток l не успевает дойти до 100 А. Пока I_L мал, катушка l живёт как одна: $I_l \approx 100\text{ А}\,(1 - e^{-t/\tau_l})$, напряжение на ветви L почти постоянно, $U_0 - R_s I_l \approx 11 \ldots 12$ В, и I_L растёт линейно: $I_L \approx (11{,}5\text{ В})\,t/L \approx 9{,}6\text{ А}\cdot t/\tau_l$. $I_L = I_\Pi$ при $t \approx (1{,}0 \ldots 2{,}1)\,\tau_l$, и тогда $I_l \approx 100\,(1 - e^{-t/\tau_l}) \approx 65 \ldots 88$ А. Численное решение уравнений (рисунок) даёт 65, 80 и 88 А при $I_\Pi = 10$, 15, 20 А; 100 А организаторов завышено.



Токи катушек после замыкания K_1; t — в единицах $l/(1\text{ Ом})$, кружки — $I_L = 10$ и 20 А.

Проверка. Пункт 2: при $\alpha \to \infty$ (катушка тока не берёт) $I_M \to 400$ А, как в пункте 1; при $\alpha \to 0$ катушка закорачивает двигатель, $I_M \to 0$.

Ответ. 1) $U_{AB}(0) = 8$ В, $I_\text{max} = 400$ А, $I = 100$ А; 2) $I_M = U_0\alpha/((r + R_0 + R_\text{M})(1 + \alpha))$; 3) $\alpha = 11$; 4) $I_l \approx 65 \ldots 88$ А.