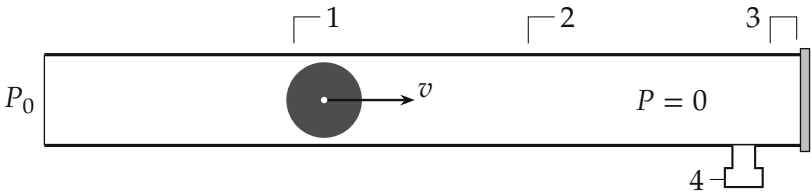
Вакуумная пушка

Задача 5. [МОШ 2019/20, 11 класс, задача 5] В последние годы большой интерес у энтузиастов, занимающихся научно-техническим творчеством, вызывает устройство под названием «вакуумная пушка». В полипропиленовой водопроводной трубе 2 (см. рисунок ниже), один конец которой герметично закрыт заглушкой из фольги 3, а другой открыт в атмосферу, разностью давлений ускоряется шарик 1 для игры в пинг-понг. Внутренний диаметр трубы близок к диаметру шарика. Рядом с заглушкой располагается штуцер 4, через который труба соединяется с вакуумным насосом. Таким образом, справа от шарика давление очень низкое, а у открытого конца трубки — давление, близкое к атмосферному, которое равно P_0.

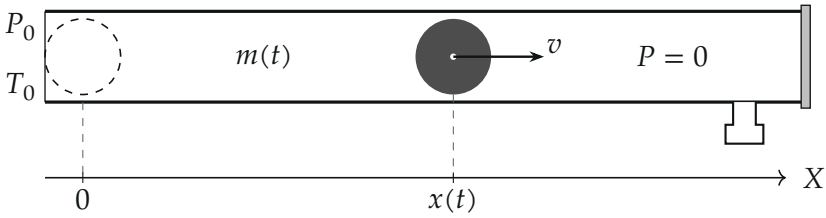


Оказывается, что при достаточно большой длине трубки и качественной откачке, шарик можно разогнать до высокой скорости, так что он легко разорвёт фольгу заглушки и вылетит из трубки. В одном видеоролике, доступном в сети, демонстрируется, как вылетающий из трубки шарик пробивает пустые банки из-под газировки, поставленные на небольшом расстоянии от трубки.

1. В самой грубой модели предполагается, что слева от шарика давление равно $P_0 = 10^5$ Па, а справа — равно нулю. Разность давлений не меняется в процессе разгона шарика. Трения между шариком и стенками трубы нет. До какой максимальной скорости $v_{\max}^{(1)}$ может быть разогнан шарик массой $M = 2{,}7$ г и диаметром $d = 40$ мм в трубе длиной $L = 2$ м? (*1 балл*)

В более точной модели считается, что под действием постоянной разности давлений ускоряется не только шарик, но и воздух массой $m(t)$,

располагающийся в момент t в трубе слева от шарика, а также вовлекаются в движение новые порции воздуха из атмосферы. Предлагается считать, что область вблизи левого торца трубы, в которой воздух вовлекается в движение, имеет малый характерный размер, сопоставимый с диаметром трубы. Снаружи трубы вне этой области воздух остаётся неподвижным. Внутри трубы воздух движется со скоростью шарика, а его плотность равна плотности воздуха ρ снаружи. Диаметр шарика много меньше длины трубы. В начальный момент времени координата x шарика и его скорость равны нулю.



2. Определите более точное значение скорости $v_{\max}^{(2)}$, до которой может быть разогнан шарик тех же размеров, что и в п. 1) задачи, в трубе той же длины. Время разгона в первом приближении можно считать равным времени разгона в п. 1). Температура воздуха и его молярная масса равны: $T_0 = 293$ К, $\mu = 29$ г/моль соответственно. (*3 балла*)
3. Считая известными только температуру $T_0 = 293$ К снаружи трубы и молярную массу воздуха $\mu = 29$ г/моль, определите максимальную скорость, до которой может быть разогнан шарик. Длина трубы предполагается достаточно большой. (*3 балла*)
4. Даны параметры: M, S, P_0, ρ, μ. Получите формулу зависимости координаты шарика от времени $x(t)$. (*5 баллов*)

Примечание. Может оказаться полезной формула $\Delta(x^2) = 2x\Delta x$, справедливая для малых изменений ($\Delta x \ll x$) величины x.

Интересно, что группа из американского университета Пёрдью, немного усложнив конструкцию, сумела разогнать шарик до сверхзвуковой скорости ($v \approx 420$ м/с, в $\mathrm{M} = 1{,}23$ раза больше скорости звука), так что после вылета из трубки шарик для настольного тенниса пробил

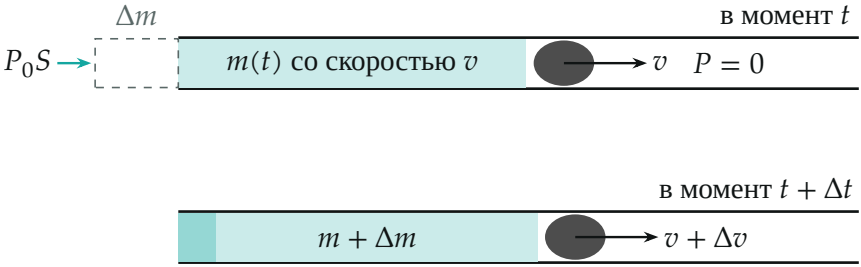
ракетку для настольного тенниса. Видео можно найти в сети по фразе: «Purdue Technology students build supersonic ping pong gun». В усовершенствованной конструкции на левом конце трубки имеется баллон со сжатым воздухом и сопло Лаваля, через которое воздух поступает в «ствол пушки».

▲ **Решение. Что происходит.** Снаружи на воздух и шарик давит атмосфера P_0 слева, справа — вакуум: постоянная сила P_0S. В грубой модели она разгоняет один шарик. В точной модели вместе с шариком движется весь воздух трубы, а у левого торца в трубу входят новые порции неподвижного воздуха. Каждую порцию надо разогнать до скорости шарика. Масса движущегося растёт, ускорение падает, скорость стремится к пределу. Главная идея: закон изменения импульса для системы «шарик + воздух в трубе + порция, которая сейчас войдёт»: в моменты t и $t + \Delta t$ в систему входят одни и те же тела, поэтому внутренние силы между ними не нужны, а из внешних — только давление P_0. Импульс этой системы за малое время Δt меняется на $P_0S\,\Delta t$.

Обозначения. Ось x вдоль трубы вправо, начало — левый торец; $S = \pi d^2/4 = 1{,}26 \cdot 10^{-3}$ м^2 — сечение трубы, $\rho = P_0\mu/(RT_0)$ — плотность воздуха снаружи (и внутри). $m(t) = \rho S x$ — масса воздуха в трубе слева от шарика.

Пункт 1. Единственная сила вдоль оси x — P_0S (справа вакуум, трения нет), она постоянна: $a = P_0S/M$, и шарик движется равноускоренно. Скорость растёт, пока действует сила, значит, наибольшая она в конце трубы, пройдя расстояние L. Работа силы на длине L равна кинетической энергии шарика: $P_0SL = M(v_{\max}^{(1)})^2/2$, откуда

$$v_{\max}^{(1)} = \sqrt{\frac{2P_0SL}{M}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 10^5 \cdot 1{,}26 \cdot 10^{-3} \cdot 2}{2{,}7 \cdot 10^{-3}}}\ \frac{\text{м}}{\text{с}} \approx 430\ \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$



Система: шарик, воздух в трубе (бирюзовый) и порция Δm неподвижного воздуха, которая за Δt входит в трубу и разгоняется.

Пункт 2: уравнение движения. Запишем закон изменения импульса в проекции на x для системы «шарик + воздух в трубе + порция Δm». Внешняя сила — давление P_0 на левую границу системы, на шарик справа давление нуль: $P_0 S$. В момент t импульс $(M+m)v$ (порция покоится). Через Δt вся система, масса $M+m+\Delta m$, движется со скоростью $v+\Delta v$:

$$P_0 S\,\Delta t = (M+m+\Delta m)(v+\Delta v) - (M+m)v = (M+m)\Delta v + v\,\Delta m,$$

малый член $\Delta m\,\Delta v$ отброшен. Правая часть — изменение полного импульса $(M+m)v$. Суммируем от 0 до t (в начале импульс нулевой):

$$P_0 S\,t = (M+m)\,v.$$

Обратите внимание: считать, что $P_0 S = (M+m)\,a$, нельзя — масса меняется, и слагаемое $v\Delta m$ существенно.

Пункт 2: числа. Единственная внешняя сила $P_0 S$ всё время разгоняет систему, поэтому скорость растёт, пока шарик в трубе, и наибольшая она при вылете. По условию время разгона берём из пункта 1: $t_0 = L/(v^{(1)}_{\max}/2) = 2L/v^{(1)}_{\max} \approx 9{,}3$ мс (средняя скорость вдвое меньше конечной). К этому моменту воздух занимает всю трубу: $m = \rho SL$, где $\rho = P_0\mu/(RT_0) = 10^5 \cdot 0{,}029/(8{,}31 \cdot 293) = 1{,}19$ кг/м^3, $m \approx 3{,}0$ г. Тогда

$$v^{(2)}_{\max} = \frac{P_0 S t_0}{M+\rho SL} = \frac{10^5 \cdot 1{,}26\cdot 10^{-3} \cdot 9{,}3 \cdot 10^{-3}}{2{,}7\cdot 10^{-3} + 3{,}0\cdot 10^{-3}}\ \frac{\text{м}}{\text{с}} \approx 2\cdot 10^2\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$$

(205 м/с; у организаторов 199 м/с и в п. 3 294 м/с — из данных условия

не воспроизводятся, разница 1–3 %).

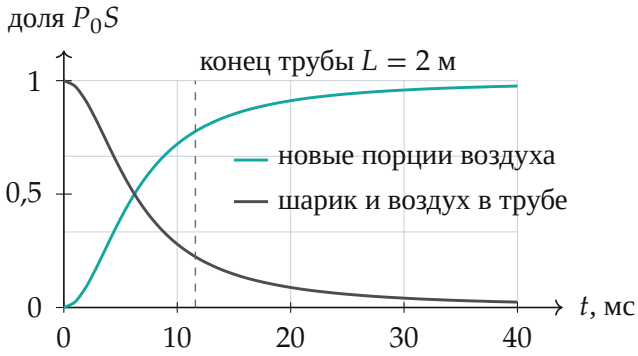
Пункт 3: предел. Спросим, на что тратится сила P_0S. Закон изменения импульса $P_0S = \dfrac{\Delta[(M+m)v]}{\Delta t}$ раскрывается на два слагаемых: за Δt в трубу входит порция $\Delta m = \rho S v\,\Delta t$ неподвижного воздуха, поэтому

$$P_0S = (M+m)\,a + \rho S\,v^2.$$

Первое слагаемое — разгон шарика и воздуха, уже движущихся, второе — разгон новых порций. Со временем $m = \rho S x$ растёт, а ускорение a падает (чем тяжелее разгоняемое, тем слабее одна и та же сила его ускоряет), и скорость растёт всё медленнее. В пределе $t \to \infty$ (труба достаточно длинная) масса воздуха в трубе намного больше M, а скорость практически постоянна, ускорение неразличимо мало. Тогда $a \to 0$, всё P_0S уходит на новые порции, и

$$P_0S = \rho S\,u^2 \quad\Rightarrow\quad u = \sqrt{\frac{P_0}{\rho}} = \sqrt{\frac{RT_0}{\mu}} = \sqrt{\frac{8{,}31\cdot 293}{0{,}029}}\ \frac{\text{м}}{\text{с}} \approx 2{,}9\cdot 10^2\ \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

То же получается и из суммарного импульса: $P_0St = (M+m)v \approx \rho S x\,v \approx \rho S\,v^2 t$ при $x \approx vt$ (скорость почти постоянна), откуда $P_0 = \rho v^2$.



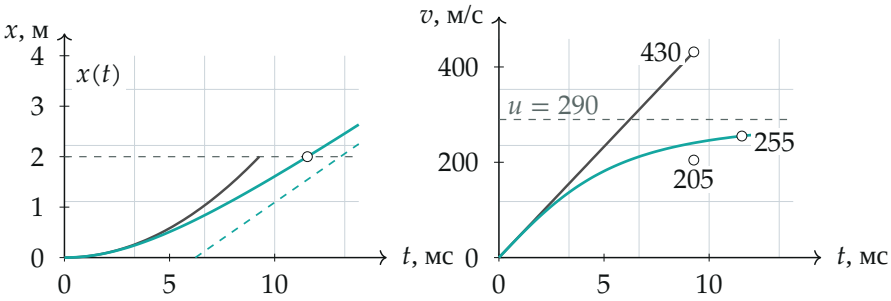
На что тратится сила P_0S: доля $\rho v^2/P_0 = (v/u)^2$ идёт на разгон новых порций воздуха, остальное — на разгон шарика и воздуха, уже находящихся в трубе. График построен для трубы без ограничения длины.

Пункт 4: $x(t)$**.** В равенстве $P_0St = (M + \rho Sx)v$ скорость $v = \Delta x/\Delta t$. Умножим на Δt и просуммируем от начала до момента t, используя $2x\Delta x = \Delta(x^2)$:

$$P_0S\,t\,\Delta t = M\,\Delta x + \rho S\,x\,\Delta x \quad \Rightarrow \quad \frac{P_0St^2}{2} = Mx + \frac{\rho Sx^2}{2}.$$

Получили квадратное уравнение для x: $\rho Sx^2 + 2Mx - P_0St^2 = 0$. Положительный корень (шарик движется вправо):

$$x(t) = -\frac{M}{\rho S} + \sqrt{\left(\frac{M}{\rho S}\right)^2 + \frac{P_0t^2}{\rho}}\,.$$



Чёрная линия — без воздуха, бирюзовая — по формуле пункта 4; штрих — асимптота и предел u. Кружок — выход из трубы (t = 11,6 мс, v = 255 м/с); цифры справа — пункты 1 и 2.

Проверка. При малых t формула даёт $x \approx P_0St^2/2M$ — один шарик, как в пункте 1; при больших — $x \approx ut - M/\rho S$, скорость u из пункта 3. По формуле пункта 4 шарик выходит из трубы ($x = L$) при t = 11,6 мс со скоростью $v = P_0St/(M + \rho SL)$ = 255 м/с. Пункт 2 с временем из пункта 1 даёт меньше (205 м/с): в точной модели трубу проходят дольше, чем без воздуха, но порядок тот же.

Ответ. 1) $v^{(1)}_{\max} = \sqrt{2P_0SL/M} \approx 430$ м/с; 2) $v^{(2)}_{\max} = P_0St_0/(M+\rho SL) \approx 2{\cdot}10^2$ м/с (205 м/с); 3) $u = \sqrt{P_0/\rho} = \sqrt{RT_0/\mu} \approx 2{,}9{\cdot}10^2$ м/с; 4) $x(t) = -\frac{M}{\rho S} + \sqrt{\left(\frac{M}{\rho S}\right)^2 + \frac{P_0t^2}{\rho}}$.