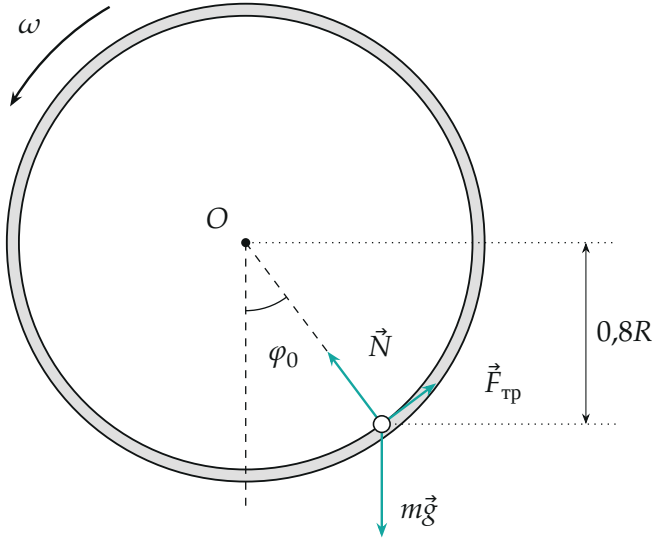
Колебания внутри трубы

Задача 6. [МОШ 2019/20, 11 класс, задача 6] Внутри горизонтально расположенной трубы радиусом R, вращающейся с некоторой угловой скоростью вокруг своей оси симметрии, находится небольшое тело. В положении равновесия тело располагается ниже оси трубы, на расстоянии $0{,}8R$ по вертикали от неё. Найдите период малых колебаний тела в плоскости, перпендикулярной оси трубы.

Примечание. Для малого угла δ ($\delta \ll 1$) и произвольного угла α справедливы приближённые равенства: $\sin(\alpha+\delta) \approx \sin\alpha + \delta\cos\alpha$, $\cos(\alpha+\delta) \approx \cos\alpha - \delta\sin\alpha$.



Поясняющий рисунок. Сечение трубы плоскостью, перпендикулярной оси. Стенка вращается, тело стоит на месте

▲ **Решение. Что происходит.** Труба вращается, а тело лежит на её внутренней стенке и стоит на месте относительно земли: стенка скользит под ним и тянет его вверх силой трения скольжения. Тело замирает там, где эта сила уравновешивает «сползание» вниз, и из условия равновесия сразу находится коэффициент трения. При смещении тела вверх по стенке сползание растёт, а сила трения чуть падает, поэтому возникает

возвращающая сила, и тело колеблется. Класс задачи — динамика тела на окружности с трением скольжения; ключевые законы — второй закон Ньютона вдоль стенки и $F_{\text{тр}} = \mu N$.

Обозначения. φ — угол между радиусом, проведённым из оси O к телу, и вертикалью вниз; φ_0 — его значение в равновесии, $\cos\varphi_0 = 0{,}8$, $\sin\varphi_0 = 0{,}6$; μ — коэффициент трения; N — сила реакции стенки; ось τ направлена по касательной к стенке вверх, в сторону, куда движется стенка, ось n — к оси трубы.

1. Положение равновесия. Тело неподвижно, ускорения нет, и сумма сил равна нулю. Стенка движется относительно тела вверх, поэтому сила трения скольжения, действующая на тело, направлена вверх вдоль стенки. Запишем условие равновесия в проекциях на оси n и τ (оси, связанные со стенкой, удобны: сила трения и реакция лежат вдоль них):

$$n:\ N - mg\cos\varphi_0 = 0, \qquad \tau:\ \mu N - mg\sin\varphi_0 = 0.$$

Здесь $F_{\text{тр}} = \mu N$, потому что тело скользит по стенке. Делим вторую запись на первую:

$$\mu = \operatorname{tg}\varphi_0 = \frac{0{,}6}{0{,}8} = \frac{3}{4}.$$

На рис. 1 то же самое видно из треугольника сил: три силы дают замкнутый треугольник, $N \perp F_{\text{тр}}$, и $\operatorname{tg}\varphi_0 = F_{\text{тр}}/N = \mu$.

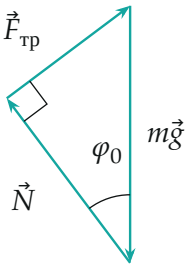


Рис. 1. Равновесие: силы $m\vec{g}$, $\vec{N}$, $\vec{F}_{тр}$ образуют замкнутый прямоугольный треугольник

Обратите внимание. Тело не вращается вместе с трубой: тогда ему понадобилась бы центростремительная сила, и оно не стояло бы на

месте. Оно неподвижно, а скользит стенка — поэтому трение именно скольжения, и его модуль равен μN при любой скорости стенки.

2. Уравнение движения при смещении. Сместим тело вверх по стенке на малый угол δ: $\varphi = \varphi_0 + \delta$ (рис. 2). Пока тело движется по стенке медленно по сравнению с самой стенкой ($R\dot{\delta} \ll \omega R$), стенка по-прежнему скользит под ним вверх, и сила трения остаётся направленной вверх с модулем μN. Второй закон Ньютона для тела в проекции на ось τ (ось, вдоль которой оно движется по окружности):

$$mR\ddot{\varphi} = \mu N - mg\sin\varphi.$$

Реакцию стенки берём из проекции на ось n: $N = mg\cos\varphi + mR\dot{\varphi}^2$. Второе слагаемое пропорционально $\dot{\varphi}^2 = \dot{\delta}^2$ — оно второго порядка малости и в линейной теории отбрасывается, поэтому $N \approx mg\cos\varphi$:

$$R\ddot{\varphi} = g(\mu\cos\varphi - \sin\varphi).$$

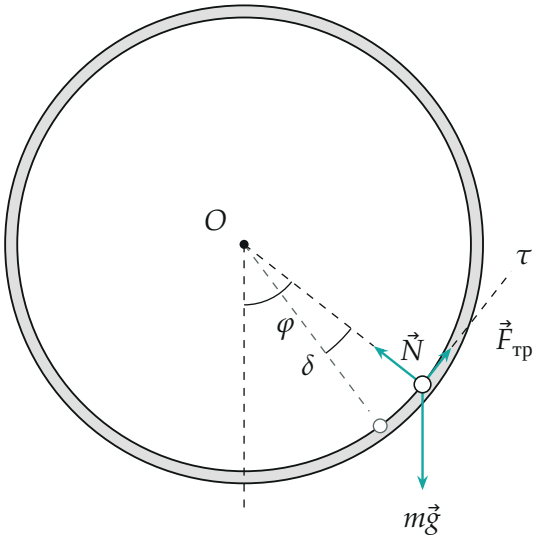


Рис. 2. Тело смещено на малый угол δ вверх по стенке (серый кружок — прежнее положение)

3. Линеаризация. Подставляем $\varphi = \varphi_0 + \delta$ и формулы из примечания:

$$\begin{aligned} R\ddot{\delta} &= g[\mu(\cos\varphi_0 - \delta\sin\varphi_0) - (\sin\varphi_0 + \delta\cos\varphi_0)] \\ &= g(\mu\cos\varphi_0 - \sin\varphi_0) - g\delta(\mu\sin\varphi_0 + \cos\varphi_0). \end{aligned}$$

Первая скобка равна нулю: это условие равновесия из пункта 1. Во второй используем $\mu = \operatorname{tg}\varphi_0$:

$$\mu\sin\varphi_0 + \cos\varphi_0 = \frac{\sin^2\varphi_0 + \cos^2\varphi_0}{\cos\varphi_0} = \frac{1}{\cos\varphi_0} = 1{,}25.$$

Получаем уравнение гармонических колебаний:

$$\ddot{\delta} = -\frac{g}{R\cos\varphi_0}\,\delta = -\frac{5g}{4R}\,\delta.$$

Знак минус: при смещении вверх ($\delta > 0$) ускорение направлено вниз, тело возвращается к равновесию.

4. Период. Из $\ddot{\delta} = -\omega_0^2\delta$ имеем $\omega_0^2 = \dfrac{5g}{4R}$ и

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{R\cos\varphi_0}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{4R}{5g}}.$$

Обратите внимание. Ответ не зависит от угловой скорости трубы: она нужна только для того, чтобы стенка скользила под телом вверх. Единственное условие — тело движется по стенке заметно медленнее самой стенки, иначе направление скольжения изменилось бы и трение сменило бы знак.

Проверка. Размерность: $\sqrt{\text{м}/(\text{м}/\text{с}^2)} = \text{с}$. Второй способ: из $\mu\cos\varphi - \sin\varphi = \dfrac{\sin\varphi_0\cos\varphi - \cos\varphi_0\sin\varphi}{\cos\varphi_0}$ уравнение $R\ddot{\varphi} = g(\mu\cos\varphi - \sin\varphi)$ принимает вид

$$R\ddot{\varphi} = \frac{g}{\cos\varphi_0}\sin(\varphi_0 - \varphi),$$

то есть тело ведёт себя как математический маятник с «эффективной

силой тяжести» $g/\cos\varphi_0 = 1{,}25\,g$, положение равновесия которого повёрнуто на φ_0; период такого маятника тот же (график на рис. 3 — синусоида, его касательная в точке φ_0 имеет наклон $-1/\cos\varphi_0$). Предел: при $\mu \to 0$ получаем $\varphi_0 \to 0$ и $T = 2\pi\sqrt{R/g}$ — период тела, скользящего без трения по дну круглой трубы; трение укорачивает период, потому что добавляет возвращающую силу.

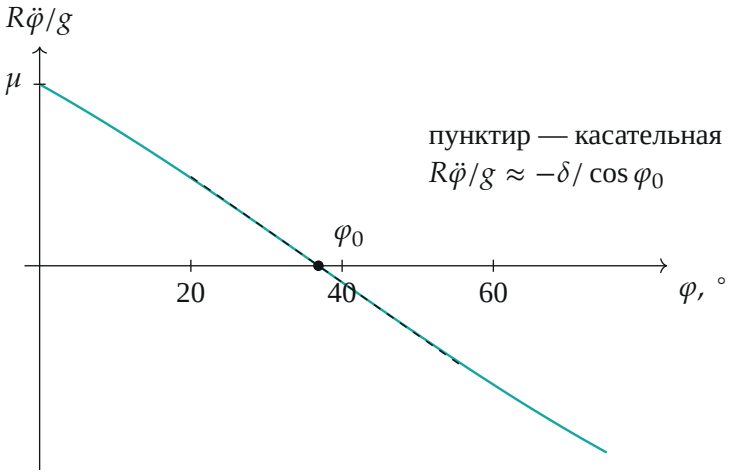


Рис. 3. Ускорение вдоль стенки $R\ddot{\varphi}/g = \mu\cos\varphi - \sin\varphi$: ноль при $\varphi_0 \approx 37°$, левее тело «поднимает» трение, правее оно съезжает вниз

Смысл: из-за трения тело сидит на стенке под углом φ_0, а его колебания — это колебания маятника в «усиленном» поле тяжести $1{,}25\,g$, поэтому они быстрее, чем у свободно скользящего без трения тела.

Ответ. $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{4R}{5g}}$ (коэффициент трения $\mu = \dfrac{3}{4}$).