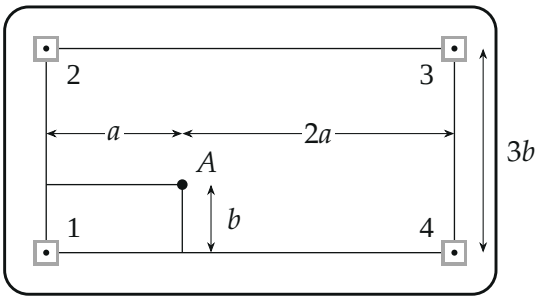
Стол на тонких ножках

Задача 7. [МОШ 2019/20, 11 класс, задача 7] Стол стоит на горизонтальном полу. Столешницу и пол можно считать абсолютно твёрдыми, а ножки — упругими, подчиняющимися закону Гука при вертикальных деформациях.



Гирю массой 24 кг ставят на стол так, что её центр масс располагается в т. A (см. рисунок, вид сверху). На сколько изменяются силы давления ножек стола: ΔF_1, ΔF_2, ΔF_3 и ΔF_4 на пол после этого? Номера ножек показаны на рисунке.

▲ **Решение.** **Что происходит.** Гиря давит на столешницу, а та передаёт нагрузку четырём упругим ножкам. Ножки сжимаются по-разному, столешница слегка наклоняется, но остаётся твёрдой плоской доской: расстояния между ножками не меняются, изгибаться ей нельзя. Условий равновесия твёрдого тела три (сумма сил и два момента), а неизвестных сил четыре. Четвёртое уравнение даёт связь между сжатиями: плоскость остаётся плоскостью, а сжатие ножки по закону Гука пропорционально её силе. Класс задачи — статика на упругих опорах (статически неопределимая система).

Обозначения. ΔF_i — добавка силы, с которой i-я ножка действует на столешницу (по третьему закону Ньютона — и на пол), Δx_i — добавочное сжатие этой ножки; $P = mg = 240$ Н при $g = 10$ м/с^2. Ножки считаем одинаковыми, жёсткость каждой k: в условии об этом прямо не сказано, но без этого ответ не получить. Сторона с a и $2a$ — «длинная», сторона с b и $2b$ — «короткая».

1. Почему считаем только добавки. До гири на ножки уже действовали начальные силы: они держали стол и в точности уравновешивали его вес. Пока ножки подчиняются закону Гука, добавка силы зависит только от добавки сжатия: $\Delta F_i = k\Delta x_i$. Вес стола и начальные силы взаимно уничтожаются и в уравнения для добавок не входят. Поэтому столешницу можно считать невесомой и нагружать только гирей P и добавками ΔF_i (рис. 1).

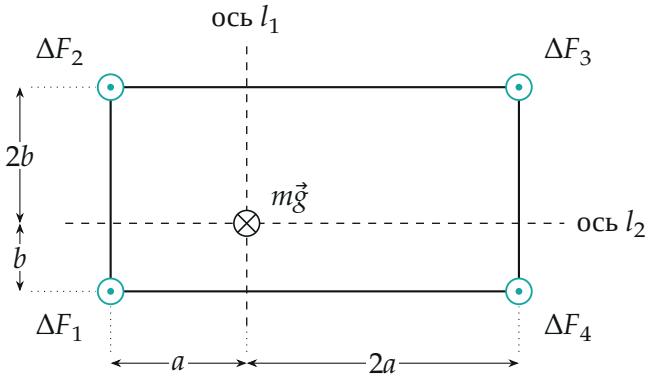


Рис. 1. Вид сверху. Силы ножек ΔF_i направлены на нас (вверх), вес гири $m\vec{g}$ — от нас; пунктиром — оси моментов через A

2. Равновесие по силам. Столешница не движется по вертикали, поэтому сумма вертикальных сил равна нулю:

$$\Delta F_1 + \Delta F_2 + \Delta F_3 + \Delta F_4 = P.$$

3. Равновесие по моментам относительно осей через A. Ось через A выбираем потому, что момент веса гири относительно неё равен нулю, и в уравнениях остаются только силы ножек. Сначала ось l_1 (на рис. 1 вертикальна): ножки 1 и 2 лежат от неё на расстоянии a по одну сторону, ножки 3 и 4 — на расстоянии $2a$ по другую. Столешница не вращается, значит моменты по обе стороны оси равны:

$$(\Delta F_1 + \Delta F_2)\, a = (\Delta F_3 + \Delta F_4)\, 2a \;\Rightarrow\; \Delta F_1 + \Delta F_2 = 2(\Delta F_3 + \Delta F_4).$$

Ось l_2 параллельна длинной стороне: ножки 1 и 4 на расстоянии b с одной стороны, ножки 2 и 3 — на расстоянии $2b$ с другой:

$$(\Delta F_1 + \Delta F_4)\, b = (\Delta F_2 + \Delta F_3)\, 2b \;\Rightarrow\; \Delta F_1 + \Delta F_4 = 2(\Delta F_2 + \Delta F_3).$$

Эти два уравнения вместе с суммой сил дают только суммы пар: найти по отдельности четыре силы они не позволяют.

4. Момент относительно диагонали 1–3. Гиря стоит в точке A, а A лежит на диагонали 1–3: от ножки 1 она отстоит на a и b, а вся диагональ имеет проекции $3a$ и $3b$, то есть A делит диагональ в отношении $1 : 2$. Возьмём ось вдоль этой диагонали. Вес гири и силы ножек 1 и 3 лежат на оси и момента не создают. Остаются силы ΔF_2 и ΔF_4 по разные стороны оси. Плечи равны: треугольники 123 и 143 равны (рис. 2), и высоты h из вершин 2 и 4 на общую сторону 13 одинаковы. Моменты уравновешивают друг друга, откуда

$$\Delta F_2\, h = \Delta F_4\, h \;\Rightarrow\; \Delta F_2 = \Delta F_4.$$

Этого мы не получили бы, взяв другую точку приложения гири: равенство работает именно потому, что A на диагонали.

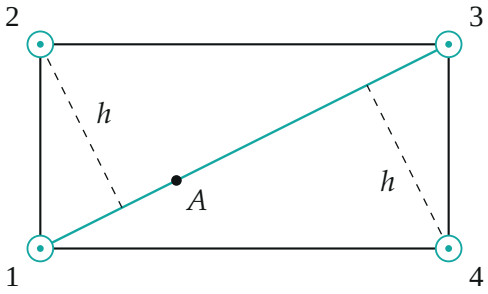


Рис. 2. Точка A лежит на диагонали 1–3; ножки 2 и 4 одинаково далеки от неё (расстояние h), но по разные стороны

5. Столешница остаётся плоской. Теперь используем упругость. Каждая диагональ столешницы — прямая, концы которой лежат на двух ножках. Когда ножки сжались, диагональ осталась прямой: один конец опустился на Δx_1, другой на Δx_3 (рис. 3). Две вертикальные

ножки и сама диагональ образуют трапецию, а середина диагонали лежит на её средней линии, поэтому она опустилась на среднее от двух сжатий. Диагонали пересекаются в одной точке — центре стола, так что для обеих диагоналей это один и тот же Δx:

$$\Delta x = \frac{\Delta x_1 + \Delta x_3}{2} = \frac{\Delta x_2 + \Delta x_4}{2}.$$

По закону Гука $\Delta F_i = k\Delta x_i$, жёсткость k сокращается:

$$\Delta F_1 + \Delta F_3 = \Delta F_2 + \Delta F_4 = \frac{P}{2} = 120\ \text{Н}.$$

Последнее равенство следует из суммы сил: обе суммы равны, а вместе дают P.

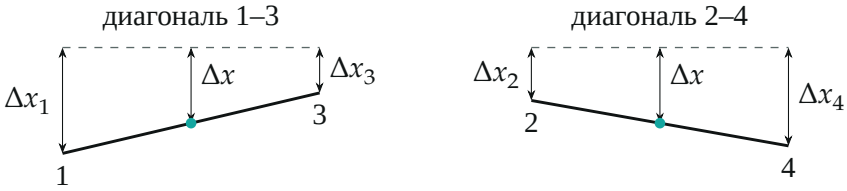


Рис. 3. Вид сбоку: пунктир — прежнее положение столешницы. Середина каждой диагонали опустилась на один и тот же Δx

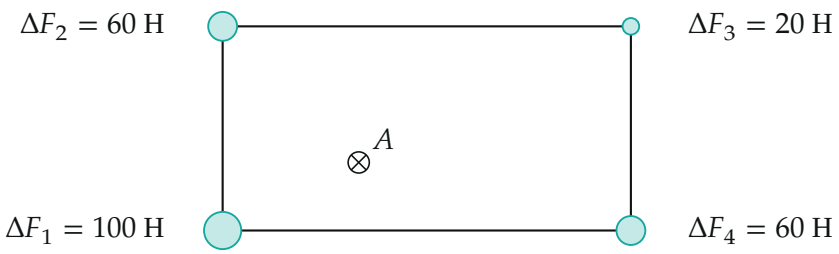
Обратите внимание. Трёх уравнений равновесия не хватает: на трёх опорах стол определился бы ими однозначно, а четвёртая ножка делает систему статически неопределимой. Недостающее уравнение даёт именно упругость ножек: у абсолютно твёрдых ножек нагрузки не определить.

6. Решаем. С $\Delta F_2 = \Delta F_4$ и $\Delta F_2 + \Delta F_4 = 120$ Н сразу $\Delta F_2 = \Delta F_4 = 60$ Н. Подставляем в уравнение для оси l_1: $\Delta F_1 + 60 = 2(\Delta F_3 + 60)$, откуда $\Delta F_1 = 2\Delta F_3 + 60$ Н. С $\Delta F_1 + \Delta F_3 = 120$ Н имеем $3\Delta F_3 = 60$ Н:

$$\Delta F_3 = 20\ \text{Н}, \qquad \Delta F_1 = 100\ \text{Н}, \qquad \Delta F_2 = \Delta F_4 = 60\ \text{Н}.$$

Все добавки положительны, значит ни одна ножка не отрывается от пола и закон Гука работает на всех (рис. 4). Наибольшая нагрузка у ножки 1,

ближайшей к точке A, наименьшая — у самой дальней ножки 3.



Проверка. Размерность: все силы в ньютонах, сумма $100 + 60 + 20 + 60 = 240$ Н $= P$. Подстановка в уравнение для оси l_2: $100 + 60 = 160 = 2(60 + 20)$ Н. Второй способ — через центр давления. Сжатие плоской столешницы линейно зависит от положения ножки, значит и сила тоже: $\Delta F = \dfrac{P}{4} + \lambda(x - x_c) + \nu(y - y_c)$, где (x_c, y_c) — центр прямоугольника. Центр давления должен лежать в A, на $a/2$ левее центра по x и на $b/2$ ниже по y: $\lambda \sum (x_i - x_c)^2 = -\dfrac{aP}{2}$, а $\sum (x_i - x_c)^2 = 4 \cdot \dfrac{9a^2}{4} = 9a^2$, откуда $\lambda = -\dfrac{P}{18a}$; так же $\nu = -\dfrac{P}{18b}$. Для ножки 1, у которой $x - x_c = -\frac{3}{2}a$ и $y - y_c = -\frac{3}{2}b$, получаем $\Delta F_1 = P\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12}\right) = \frac{5P}{12} = 100$ Н; ножки 2 и 4 дают $\frac{P}{4} = 60$ Н, ножка 3 — $\frac{P}{12} = 20$ Н. Совпадает. Замечание об официальном ответе: в нём указано $\Delta F_3 = 60$ Н, $\Delta F_4 = 20$ Н, то есть номера 3 и 4 перепутаны: такой набор не удовлетворяет собственным критериям организаторов: $\Delta F_1 + \Delta F_4 = 120$ Н $\neq 2(\Delta F_2 + \Delta F_3) = 240$ Н и $\Delta F_1 + \Delta F_3 = 160$ Н $\neq \Delta F_2 + \Delta F_4 = 80$ Н; по рисунку условия наименьшая добавка — у ножки 3.

Смысл: гиря ближе к ножке 1, поэтому она принимает почти половину веса (5/12), а ножка 3, самая дальняя, — лишь 1/12.

Ответ. $\Delta F_1 = 100$ Н, $\Delta F_2 = 60$ Н, $\Delta F_3 = 20$ Н, $\Delta F_4 = 60$ Н (при $g = 10$ м/с^2).