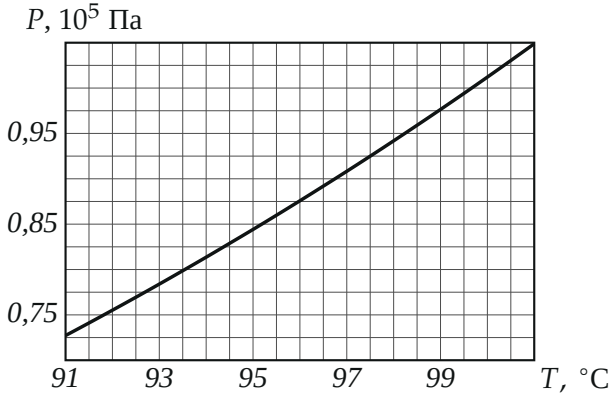
Вода-пар-вода

Задача 8. [МОШ 2019/20, 11 класс, задача 8] Воде массой $m = 180$ г при постоянном давлении $p_1 = 10^5$ Па сообщают некоторое количество теплоты, так что она превращается в пар и нагревается до температуры $T_1 = 105\,^\circ$C. Далее пар адиабатически расширяется и в какой-то момент приходит в состояние насыщения, после чего конденсируется. График зависимости давления насыщенных паров воды от температуры показан на рисунке ниже.



Считая изменение параметров пара при адиабатическом расширении малым, определите приближённо температуру воды в начале конденсации.

Чему равна суммарная работа пара при его нагревании после испарения и охлаждении до начала конденсации? Молярная теплоёмкость пара при постоянном объёме равна $c_V = 3R$.

Примечание. Учтите, что для малых изменений Δp и ΔV величин p и V справедлива приближённая формула $\Delta(pV) = p\Delta V + V\Delta p$.

▲ **Решение. Что происходит.** Сначала вода под поршнем с грузом находится при постоянном давлении p_1. Ей сообщают теплоту: вода кипит, и, пока она не выкипела вся, температура не растёт — вся теплота уходит на превращение воды в пар. Когда воды не осталось, пар нагревается до $T_1 = 105\,^\circ$C при том же p_1. Дальше пар расширяется адиабатически,

то есть без теплообмена. Расширяясь, он совершает работу, а раз тепло к нему не поступает, работа идёт за счёт внутренней энергии: пар остывает, и давление падает. Кривая насыщения при остывании тоже снижается, но быстрее, чем давление пара, поэтому в какой-то момент они сравняются — пар станет насыщенным и начнёт конденсироваться (рис. 1). Нужно найти температуру T_2 в этот момент и суммарную работу пара. Класс задачи — первое начало термодинамики для идеального газа плюс насыщенный пар.

Обозначения. Состояния пара: a — вода уже выкипела ($T_\text{п}$ — температура кипения при p_1), b — конец нагревания (T_1, p_1), c — начало конденсации (T_2, p_2). $\nu = m/M = 180/18 = 10$ моль — количество вещества (молярная масса воды $M = 18$ г/моль).

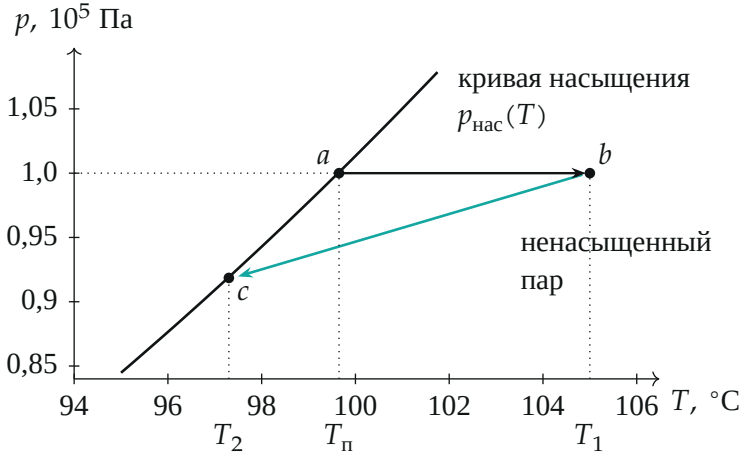


Рис. 1. Плоскость (T, p) (оси начинаются не с нуля). Пар нагревается по изобаре $a \to b$ и расширяется по адиабате $b \to c$ (почти прямая); в точке c она встречает кривую насыщения

1. Температура кипения и пар в точке b. Вода кипит там, где давление насыщения равно внешнему давлению, то есть $p_\text{нас}(T_\text{п}) = p_1 = 10^5$ Па. По графику условия это $T_\text{п} \approx 99{,}6\,^\circ$C (чуть правее отметки $99{,}5\,^\circ$C). Кривая насыщения возрастает, поэтому при $105\,^\circ$C давление насыщения больше 10^5 Па, а давление пара в точке b равно $p_1 = 10^5$ Па —

меньше него. Значит, пар в точке b ненасыщенный, и пока он не достиг насыщения, его можно считать идеальным газом: $pV = \nu RT$.

2. Можно ли считать изменения малыми. Температура при расширении упадёт градусов на десять из 378 К: $\Delta T/T \approx 10/378 \approx 3\,\%$. Давление изменится на единицы процентов. Такие изменения считаем малыми: произведения малых добавок можно отбросить, и все связи станут линейными.

3. Связь малых изменений на адиабате. Начнём с уравнения состояния. Раскрываем $\Delta(pV) = (p+\Delta p)(V+\Delta V) - pV = p\Delta V + V\Delta p + \Delta p\,\Delta V$: последнее слагаемое — произведение двух малых величин, им пренебрегаем (так записана и подсказка в условии):

$$p\Delta V + V\Delta p = \nu R\Delta T.$$

Первое начало для адиабаты: теплоты нет, поэтому работа $p\Delta V$ совершается за счёт убыли внутренней энергии,

$$0 = \nu c_V \Delta T + p\Delta V, \qquad p\Delta V = -3\nu R\Delta T.$$

Подставляем во второе уравнение: $V\Delta p = 4\nu R\Delta T$. Делим на $pV = \nu RT$:

$$\frac{\Delta p}{p} = 4\,\frac{\Delta T}{T}.$$

Число 4 — это $\gamma/(\gamma-1)$ при показателе адиабаты $\gamma = c_p/c_V = (c_V + R)/c_V = 4/3$: пар остывает, и давление падает в четыре раза сильнее температуры в относительных долях.

4. Почему нельзя искать касательную к кривой насыщения. Соблазнительно считать $\Delta p/\Delta T$ наклоном кривой насыщения и искать на графике точку с нужным наклоном. Это ошибка по двум причинам. Во-первых, кривая насыщения почти прямая, и точку с заданным наклоном на ней не найти. Во-вторых, главное: изменения $\Delta p = p - p_1$ и $\Delta T = T - T_1$ отсчитаны от состояния b, где пар ненасыщенный и на кривой насыщения его нет. На кривой лежит только конечная точка c. Условие $\Delta p/p = 4\,\Delta T/T$ описывает путь, по которому идёт состояние

пара, а нужная точка — пересечение этого пути с кривой насыщения.

5. Прямая адиабаты. Изменения малы, отношение p/T почти не меняется, поэтому в коэффициенте заменяем $p \to p_1$, $T \to T_1 = 378$ К. Получаем $p - p_1 = \dfrac{4p_1}{T_1}(T - T_1)$, то есть прямую

$$p(T) = p_1\left[1 - \frac{4\,(T_1 - T)}{T_1}\right].$$

Разность $T_1 - T$ в кельвинах и в градусах Цельсия одинакова, поэтому подставляем температуры в градусах Цельсия из оси графика, а в знаменателе стоит $T_1 = 378$ К. Прямую наносим на график условия по двум точкам:

$$p(100\,^\circ\text{C}) \approx 0{,}947 \cdot 10^5 \text{ Па}, \qquad p(91\,^\circ\text{C}) \approx 0{,}852 \cdot 10^5 \text{ Па}.$$

Рисуем прямую поверх кривой насыщения (рис. 2): искомая температура — там, где они пересекаются, потому что только в этой точке пар одновременно подчиняется и адиабате, и условию насыщения.

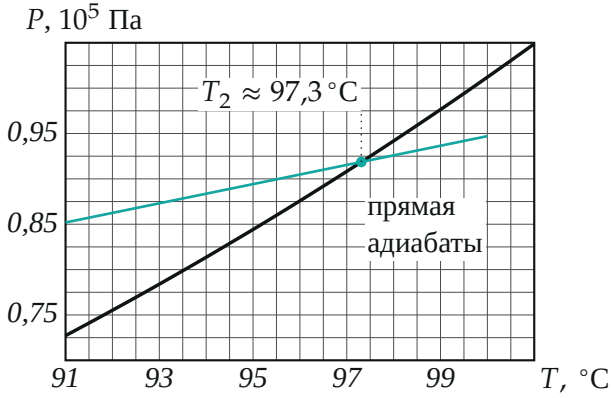


Рис. 2. График условия с прямой адиабаты $p(T)$ (бирюзовая): в точке пересечения давление пара сравнялось с давлением насыщения

Уточним по значениям. По графику условия $p_{\text{нас}}(97\,^\circ\text{C}) \approx 0{,}908 \cdot 10^5$ Па и $p_{\text{нас}}(98\,^\circ\text{C}) \approx 0{,}942 \cdot 10^5$ Па, на адиабате $p(97) \approx 0{,}915 \cdot 10^5$ Па

и $p(98) \approx 0{,}926 \cdot 10^5$ Па. Разность $p_{\text{ад}} - p_{\text{нас}}$ равна $+0{,}007 \cdot 10^5$ Па при 97 °C и $-0{,}016 \cdot 10^5$ Па при 98 °C. При 98 °C давление пара ещё ниже давления насыщения (пар ненасыщенный), а превысить насыщение пар не может, значит конденсация началась раньше, между 97 и 98 °C. Линейная интерполяция:

$$T_2 \approx 97 + \frac{0{,}007}{0{,}007 + 0{,}016}\ ^\circ\text{C} \approx 97{,}3\ ^\circ\text{C}.$$

Без линеаризации адиабата идёт по $p = p_1(T/T_1)^4$ (из $pV^{4/3} = \text{const}$ и $pV = \nu RT$), и пересечение даёт 97,4 °C. Разница порядка 0,1 К — меньше точности чтения графика, поэтому принимаем

$$T_2 \approx 97{,}4\ ^\circ\text{C} \quad (97{,}3 \ldots 97{,}5\ ^\circ\text{C}).$$

Обратите внимание. Конденсация начинается не сразу при остывании, а только когда давление пара станет равным давлению насыщения при его нынешней температуре; пока пар ненасыщенный, он ведёт себя как обычный газ.

6. Работа на изобарном участке $a \to b$. Давление постоянно, поэтому $A_1 = p_1 \Delta V = \nu R\,\Delta T$ (из $pV = \nu RT$ при $p = \text{const}$):

$$A_1 = \nu R(T_1 - T_{\text{п}}) = 10 \cdot 8{,}31 \cdot (105 - 99{,}6)\ \text{Дж} \approx 0{,}45\ \text{кДж}.$$

Работу при самом испарении воды не считаем: в вопросе — нагревание после испарения. Температура при кипении не менялась, поэтому нагрев пара начинается с $T_{\text{п}}$.

7. Работа на адиабатном участке $b \to c$. Считать площадь под адиабатой неудобно. Вместо этого используем первое начало: теплоты нет, поэтому работа газа равна убыли внутренней энергии, $A_2 = -\Delta U = \nu c_V(T_1 - T_2)$:

$$A_2 = 3\nu R(T_1 - T_2) = 3 \cdot 10 \cdot 8{,}31 \cdot (105 - 97{,}4)\ \text{Дж} \approx 1{,}90\ \text{кДж}.$$

Обе работы положительны: пар расширяется (рис. 3).

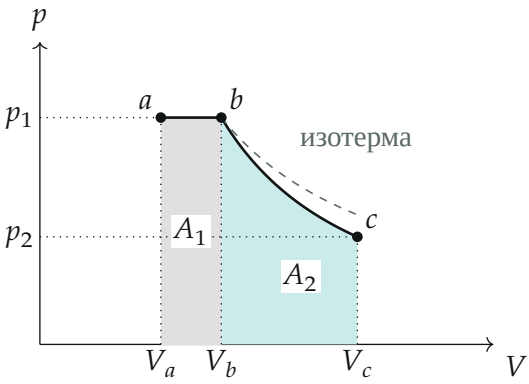


Рис. 3. Схема в плоскости (V, p) (не в масштабе): серая площадь — A_1 на изобаре, бирюзовая — A_2 на адиабате; адиабата идёт круче изотермы

8. Суммарная работа:

$$A = A_1 + A_2 = \nu R(T_1 - T_{\text{п}}) + 3\nu R(T_1 - T_2) \approx 0{,}45 + 1{,}90 \approx 2{,}3 \text{ кДж}.$$

Проверка. Размерность: $\nu R\Delta T$ — моль·Дж/(моль·К)·К = Дж. Второй способ для A_2: по уравнению адиабаты $A_2 = \dfrac{p_b V_b - p_c V_c}{\gamma - 1}$, где $\gamma = \dfrac{c_V + R}{c_V} = \dfrac{4}{3}$, то есть $A_2 = 3(p_b V_b - p_c V_c) = 3\nu R(T_1 - T_2)$ — та же формула. Предел: если бы пар не остыл ($T_2 \to T_1$), $A_2 \to 0$. Значения $T_2 \approx 97{,}4\,^\circ$C и $A \approx 2{,}3$ кДж совпадают с официальными 97,5 °C и 2,32 кДж в пределах точности графика.

Смысл: изобарное нагревание даёт малую часть работы (его интервал температур всего 5 К), основная часть — адиабатное расширение, при котором пар остывает на 7,6 К и начинает конденсироваться.

Ответ. $T_2 \approx 97{,}4\,^\circ$C (по графику 97,3–97,5 °C); $A = \nu R(T_1 - T_{\text{п}}) + 3\nu R(T_1 - T_2) \approx 2{,}3$ кДж.