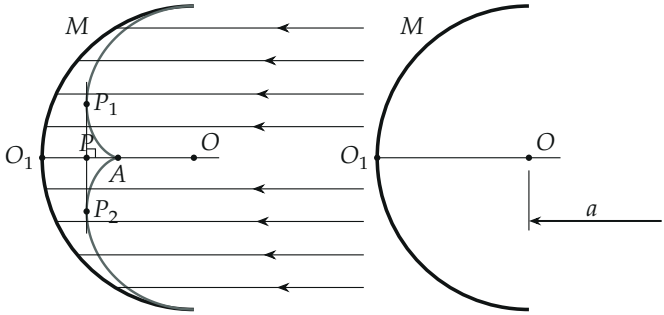
Каустики

Задача 9. [МОШ 2019/20, 11 класс, задача 9] Каустика — это огибающая семейства лучей, не пересекающихся в одной точке. В плоском случае, рассматриваемом в этой задаче, каустика — это кривая, которой касаются все лучи, отражающиеся от некоторой поверхности, или испытывающие преломление на некоторой границе раздела. Интенсивность света вблизи каустики возрастает, поэтому кривые каустик хорошо видны невооружённым глазом и на фотографиях.

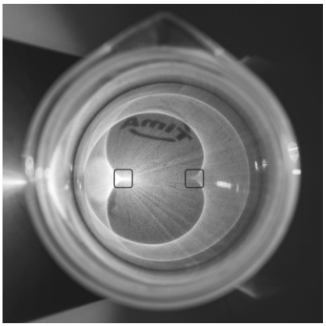
1) Кривая серого цвета на рисунке — это каустика, образованная после отражения пучка параллельных лучей цилиндрической поверхностью M, радиус которой равен R. Определите расстояние от оси цилиндра т. O до вершины каустики — т. A, а также расстояние PA. OO_1 — ось симметрии, P_1P_2 — касательная к каустике. (*5 баллов*)
2) Источник, освещающий цилиндрическую поверхность радиусом R, располагается на расстоянии $a = 4R$ от т. O на оси симметрии системы OO_1. Определите расстояние от т. O до вершины каустики, формируемой отражёнными лучами в этом случае. (*4 балла*)



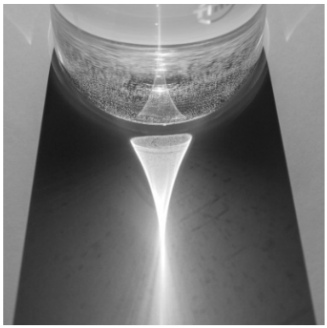
К п. 1 К п. 2

В тонкостенный стеклянный цилиндрический стакан наливают воду и освещают светом фонаря. Ось пучка света составляет разные углы α с горизонтальной поверхностью стола в п. 3 и п. 4. В п. 3 стакан фотографируют сверху (оптическая ось объектива перпендикулярна дну

стакана), а освещают справа. В п. 4 ось объектива немного отклоняется от перпендикуляра.



К п. 3



К п. 4

3) Величина угла α около 45°. Вблизи дна стакана наблюдается кривая с двумя вершинами, части которой напоминают кривую из п. 1. На рисунке вершины обведены квадратиками. Объясните наблюдаемую картину. (*3 балла*)

4) Радиус основания стакана равен $R = 8$ см. Фонарь располагается на расстоянии $a \approx 10R$ от оси стакана. Угол α можно считать малым. Снаружи стакана видна каустика, образованная прошедшими через стакан лучами. Определите приближённо расстояние от стакана до вершины каустики (до вершины «конуса»). Показатель преломления воды равен $n \approx 1{,}33$. (*6 баллов*)

▲ **Решение. Что происходит.** Каустика — огибающая лучей: каждый луч её касается. Отсюда два приёма. Острие каустики на оси дают приосевые (параксиальные) лучи — его находит параксиальная оптика (зеркало, линза). А прямая, касающаяся каустики, — это сам луч. Пункты 1–3 — отражение от вогнутого цилиндра, пункт 4 — преломление в водяной «толстой линзе». Класс задачи — геометрическая оптика в параксиальном приближении.

Обозначения. O — ось цилиндра, O_1 — вершина зеркала на оси, θ — угол между радиусом в точку падения M и осью OO_1. Всё рассматриваем в сечении, перпендикулярном оси цилиндра.

Пункт 1. Вершина A и расстояние PA.

1.1. Вершина каустики. Луч параллелен оси на малой высоте h. Нормаль OM наклонена к оси на $\theta \approx h/R$; по закону отражения луч поворачивается на 2θ и пересекает ось на расстоянии $h/\operatorname{tg} 2\theta \approx R/2$ от зеркала — независимо от h. Все приосевые лучи проходят через одну точку, а каустика касается всех лучей, значит, это её вершина A:

$$O_1A = \frac{R}{2} \quad \Rightarrow \quad OA = R - \frac{R}{2} = \frac{R}{2}.$$

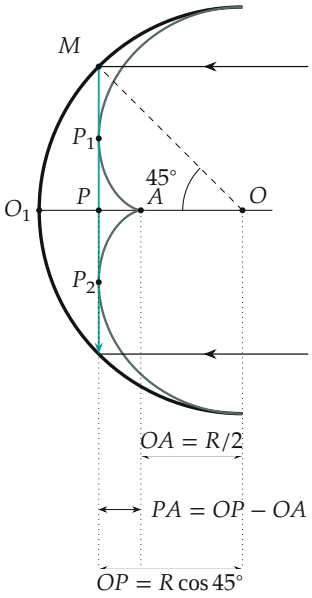


Рис. 1. Лучи, пришедшие на высоте $R\sin 45°$, после отражения идут перпендикулярно оси по одной прямой P_1P_2 (бирюзовая)

1.2. Прямая P_1P_2 — это отражённый луч. Касательная к кривой в точке единственна, а луч, пришедший в P_1, касается каустики там же — значит, прямая P_1P_2 и есть этот луч. Она перпендикулярна оси, а отражённый луч составляет с осью угол 2θ:

$$2\theta = 90° \quad \Rightarrow \quad \theta = 45°.$$

Точка падения M лежит на высоте $R\sin 45°$ и на расстоянии $R\cos 45°$

от O вдоль оси, поэтому вертикальный луч пересекает ось в P с $OP = R\cos 45^\circ = R/\sqrt{2}$ (рис. 1). Тогда

$$PA = OP - OA = \frac{R}{\sqrt{2}} - \frac{R}{2} = \frac{R(\sqrt{2}-1)}{2} \approx 0{,}21R.$$

Лучи на высотах $\pm R\sin 45^\circ$ идут после отражения по этой прямой навстречу друг другу, точки касания P_1, P_2 симметричны.

Проверка точки касания (второй способ). Два соседних луча, пришедшие под углами θ и $\theta + d\theta$ (рис. 2), падают в точки, отстоящие на $R\,d\theta$, и после отражения повёрнуты друг к другу на $2\,d\theta$. Поперёк луча между ними $l = R\,d\theta\cos\theta$; оно «закрывается» на расстоянии s от зеркала, где $l = s\cdot 2\,d\theta$: $s = \frac{1}{2}R\cos\theta$. При $\theta = 45^\circ$ это $R/(2\sqrt{2})$ — середина отрезка MP, как на рисунке условия; при $\theta \to 0$ — $R/2$, вершина A.

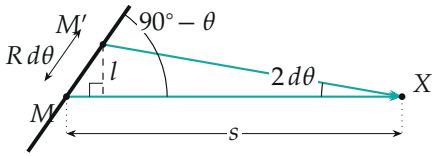


Рис. 2. Два соседних отражённых луча пересекаются на расстоянии s от зеркала (углы для наглядности увеличены)

Пункт 2. Точечный источник, $a = 4R$. Вершина — снова точка, где ось пересекают приосевые лучи. Луч выходит из S под малым углом β и падает в M (рис. 3) на высоте $h \approx (a+R)\beta = R\theta$, откуда $\theta = \beta(a+R)/R$.

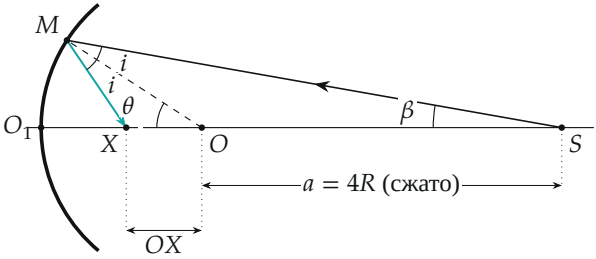


Рис. 3. Луч из источника S отражается в M и пересекает ось в X. Рисунок схематичный: углы увеличены, a сжато

Внешний угол треугольника SOM при O равен сумме двух внутренних: $\theta = \beta + i$, где i — угол падения, значит $i = \theta - \beta$. Отражённый луч составляет с нормалью тот же угол i, и в треугольнике OMX по теореме синусов для малых углов

$$\frac{OX}{\sin i} = \frac{OM}{\sin(\theta + i)} \;\Rightarrow\; OX \approx R\,\frac{i}{\theta + i} = R\,\frac{\theta - \beta}{2\theta - \beta}.$$

Подставим $\theta = \beta(a + R)/R$, то есть $\theta/\beta = (a + R)/R$:

$$OX = R\,\frac{(a + R)/R - 1}{2(a + R)/R - 1} = \frac{aR}{2a + R}.$$

От β не зависит — все приосевые лучи проходят через X, это вершина. При $a = 4R$:

$$OA = \frac{4R \cdot R}{8R + R} = \frac{4R}{9}.$$

Проверка. Предел $a \to \infty$ даёт $R/2$, как в п. 1. Формула вогнутого зеркала $\frac{1}{5R} + \frac{1}{s} = \frac{2}{R}$ даёт $s = 5R/9$ от вершины, то есть $4R/9$ от O.

Пункт 3. Двойная каустика на дне стакана. Стенка стакана — вертикальный цилиндр: отражение от неё меняет только горизонтальную составляющую направления луча. Поэтому в проекции на дно (её и снимает объектив) пучок отражается от окружности, как в п. 1, а наклон α лишь сдвигает каустику вдоль лучей.

Свет входит справа и отражается от левой половины стенки — вогнутого зеркала: это *первая* каустика, вершина A_1 на $R/2$ левее оси (рис. 4). За вершиной пучок расходится, доходит до правой половины стенки и отражается ещё раз — *вторая* каустика. Её вершину ищем, как в п. 2: источник — A_1, на $3R/2$ от правой вершины стенки; $\frac{1}{3R/2} + \frac{1}{s} = \frac{2}{R}$ даёт $s = \frac{3}{4}R$, вершина A_2 на $R/4$ правее оси.

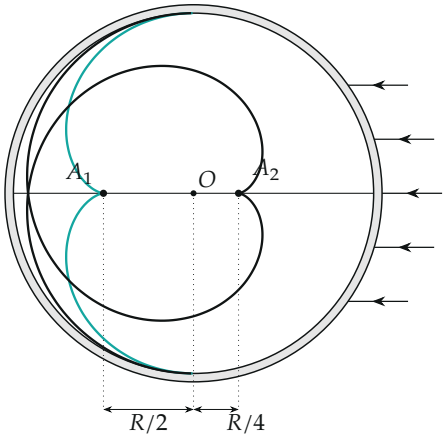


Рис. 4. Горизонтальная проекция. Свет идёт справа. Бирюзовая — каустика лучей, отразившихся один раз от левой половины стенки, чёрная — лучей, отразившихся от левой и затем от правой. Расчёт двойного отражения выполнен численно

Вместе получается кривая с двумя вершинами на расстояниях $R/2$ и $R/4$ по разные стороны от оси — как на снимке. Вторая каустика слабее: при каждом отражении часть света выходит из стакана.

Пункт 4. Каустика снаружи стакана. Угол α мал — задача плоская. Вершина каустики — точка схода приосевых лучей; стекло тонкое. Водяной цилиндр — «толстая линза» из двух круговых границ радиуса R с вершинами на расстоянии $2R$. Идём по лучу через каждую границу.

Преломление на одной границе для малых углов (предмет на s от вершины, изображение на s'):

$$\frac{n_1}{s} + \frac{n_2}{s'} = \frac{n_2 - n_1}{R_{\text{гр}}},$$

$R_{\text{гр}} > 0$, если центр кривизны за границей по ходу луча. Вывод — закон Снеллиуса для малых углов: $n_1(h/s + h/R_{\text{гр}}) = n_2(h/R_{\text{гр}} - h/s')$, h сокращается.

Первая граница (воздух → вода, $R_{\text{гр}} = R$, $s = a - R = 9R$):

$$\frac{1}{9R} + \frac{1{,}33}{s'} = \frac{0{,}33}{R} \;\Rightarrow\; s' = \frac{1{,}33R}{0{,}33 - 0{,}111} \approx 6{,}08R.$$

Точка схода — на $6{,}08R$ за передней вершиной, то есть за задней границей: для неё это мнимый предмет, $s = -(6{,}08R - 2R) = -4{,}08R$.

Вторая граница (вода → воздух, $R_{\text{гр}} = -R$):

$$\frac{1{,}33}{-4{,}08R} + \frac{1}{s''} = \frac{1 - 1{,}33}{-R} = \frac{0{,}33}{R} \;\Rightarrow\; \frac{1}{s''} = \frac{0{,}33 + 0{,}326}{R} \;\Rightarrow\; s'' \approx 1{,}52R.$$

Вершина каустики — на $S \approx 1{,}5R = 12$ см за стаканом (при $n = 4/3$ ровно: $s' = 6R$, $s = -4R$, $S = 1{,}5R$).

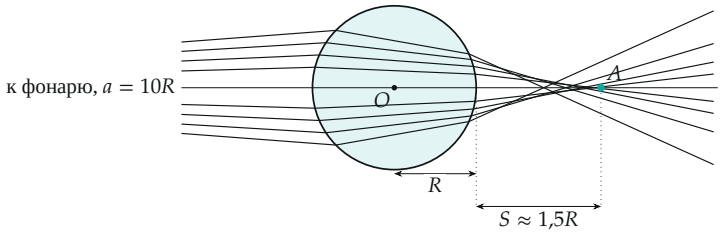


Рис. 5. Ход лучей через водяной цилиндр ($n = 1{,}33$, фонарь на $10R$): лучи у оси сходятся в точке A на $1{,}52R$ за задней стенкой; лучи дальше от оси пересекают ось ближе — они образуют каустику (расчёт по закону Снеллиуса)

Проверка. Численный расчёт хода лучей по закону Снеллиуса (рис. 5): луч на высоте $0{,}01R$ пересекает ось на $1{,}524R$ за стенкой, на высоте $0{,}4R$ — на $1{,}30R$: дальние лучи сходятся ближе, острие — у приосевых. Предел: источник на бесконечности даёт $S \approx R$.

Смысл: острие «конуса» — фокус приосевых лучей; остальные пересекают ось ближе и рисуют сам конус.

Ответ. 1) $OA = \dfrac{R}{2}$, $PA = \dfrac{R(\sqrt{2} - 1)}{2} \approx 0{,}21R$; 2) $OA = \dfrac{4R}{9}$; 3) на дне стакана видны две каустики отражённых лучей: одна — лучи, один раз отразившиеся от левой половины стенки (вершина на $R/2$ левее оси), другая — лучи, отразившиеся от левой, а затем от правой половины (вершина на $R/4$ правее оси); 4) $S \approx 1{,}5R = 12$ см.