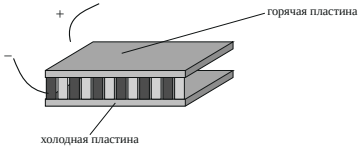
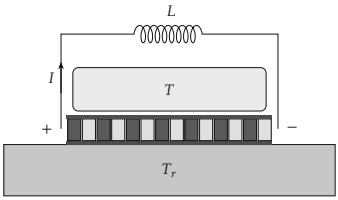
Тепловой индуктор

Задача 10. [МОШ 2019/20, 11 класс, задача 10] Элемент Пельтье состоит из двух пластин, разделённых большим количеством полупроводниковых блоков (рис. из «Википедии» ниже), и представляет собой преобразователь электрической энергии в тепловую. Он также может работать и в обратном режиме — вырабатывать ЭДС при наличии разности температур на пластинах.



На втором рисунке схематично изображено устройство на основе элемента Пельтье. Нижняя пластина находится в контакте с «тепловым резервуаром» — большим телом, температуру которого T_r можно считать постоянной. Верхняя пластина контактирует с телом с теплоёмкостью C и температурой T, которая изменяется со временем. Сверхпроводящая катушка с индуктивностью L включена между контактами элемента. В начальный момент: $T = T_0$, $T_0 > T_r$.



В данных условиях верхнее тело отдаёт элементу за время Δt количество теплоты $\Delta Q = \alpha T I \Delta t$, где α — постоянный коэффициент, I — ток через элемент. Положительным направлением тока считается направление от «плюса» к «минусу». Элемент Пельтье при этом вырабатывает ЭДС, которая равна $\mathcal{E} = \alpha(T - T_r)$. Полярность создаваемой ЭДС (для $T > T_r$) совпадает с указанной на рисунке. Сопротивление элемента Пельтье равно R.

Оказывается, в рассматриваемой системе возможно периодическое изменение температуры тела $T(t)$ и тока в цепи $I(t)$. В задаче предлагается исследовать колебания тока и температуры при различных значениях параметров: T_r, T_0, C, α, R, которые считаются известными. Ток в цепи в начальный момент равен нулю: $I(0) = 0$. Разность температур тела и резервуара можно считать малой: $|T - T_r| \ll T_r$ в любой момент времени.

1. Рассмотрим идеализированный, фантастический случай, когда сопротивление R равно нулю и теплообмен между тепловым резервуаром и телом за счёт теплопроводности отсутствует.

1a) Получите дифференциальное уравнение для функции $I(t)$. (*2 балла*)

1b) Преобразуйте полученное уравнение с учётом условия $|T - T_r| \ll T_r$ и найдите частоту ω_0 колебаний тока. (*3 балла*)

1c) Найдите зависимость температуры тела от времени $T(t)$. (*1 балл*)

2. Физически случай, описанный в п. **1**, никогда не реализуется. Рассмотрим параметры системы, близкие к реальности. Пусть известно сопротивление элемента R, мощность передачи тепла от тела резервуару определяется соотношением $P = k(T - T_r)$, где k — известный коэффициент, а Джоулево тепло, выделяющееся в элементе, делится поровну между пластинами. В этом случае колебания будут затухающими.

2a) Получите дифференциальное уравнение для функции $I(t)$ в этом случае. (*3 балла*)

2b) Покажите, что нелинейными слагаемыми, пропорциональными I^2 и $I\dot{I}$, (точка сверху обозначает производную по времени) в уравнении из п. 2a) можно пренебречь и преобразуйте полученное уравнение к виду $\ddot{I} + 2\gamma\dot{I} + \omega^2 I = 0$ (уравнение затухающих колебаний). Чему равны коэффициенты γ и ω? (*4 балла*)

2c) Полагая затухание слабым ($\gamma^2 \ll \omega^2$), определите относительное изменение амплитуды тока за период $\dfrac{\Delta I_{\max}}{I_{\max}}$. Ответ выразите через коэффициенты γ и ω. (*3 балла*)

3. Предлагается создать на основе данного устройства установку для точного измерения теплоёмкости тел. Параметры: T_r, α, k, R, L извест-

ны. Их измерили раньше с высокой точностью. В распоряжении экспериментатора есть электроизмерительные приборы, осциллограф и генератор переменного напряжения, частоту которого можно менять в широком диапазоне. Опишите в двух словах возможную схему эксперимента. (*2 балла*)

▲ **Решение. Что происходит.** Пока верхнее тело теплее резервуара, элемент Пельтье работает как батарейка: между его пластинами возникает ЭДС $\alpha(T - T_r)$ и в цепи с катушкой идёт ток. Ток уносит из тела тепло αTI, тело остывает, ЭДС убывает. Но катушка не даёт току измениться мгновенно: он продолжает идти, тело охлаждается ниже T_r, ЭДС меняет знак и тормозит ток. Цепочка «температура → ЭДС → ток → температура» замкнута, как в LC-контуре, где роль конденсатора играет тело, — отсюда колебания; затухание вносят R и k. Класс задачи — связанные тепловая и электрическая цепи, малые колебания; законы — баланс тепла тела и правило Кирхгофа.

Обозначения. $\mathcal{E} = \alpha(T - T_r)$ — ЭДС элемента, точка — производная по времени.

Пункт 1. Идеальный случай: $R = 0$, $k = 0$.

1а. Уравнение для тока. Тепловой баланс тела: за dt оно отдаёт элементу $\alpha TI\,dt$ (отсюда минус) и больше ничем не обменивается:

$$C\dot{T} = -\alpha TI.$$

Правило Кирхгофа: сопротивления нет, и ЭДС элемента равна напряжению на катушке:

$$L\dot{I} = \mathcal{E} = \alpha(T - T_r).$$

Продифференцируем второе уравнение и подставим первое:

$$L\ddot{I} = \alpha\dot{T} = -\frac{\alpha^2 TI}{C} \;\Rightarrow\; LC\ddot{I} + \alpha^2 TI = 0.$$

В искомом уравнении должен остаться только ток, поэтому выразим температуру через ток из того же уравнения Кирхгофа, $T = T_r + \dfrac{L}{\alpha}\dot{I}$,

и получим

$$LC\ddot{I} + \alpha^2 T_r I + \alpha L \dot{I} I = 0.$$

1b. Частота. Второе слагаемое линейно по I, третье — нет. Их отношение: $\dfrac{\alpha L \dot{I} I}{\alpha^2 T_r I} = \dfrac{L\dot{I}}{\alpha T_r} = \dfrac{T - T_r}{T_r} \ll 1$ (используем $L\dot{I} = \alpha(T - T_r)$). Значит, нелинейным слагаемым можно пренебречь, то есть в коэффициенте при I температуру можно заменить на постоянную T_r — и уравнение станет линейным уравнением колебаний:

$$\ddot{I} + \omega_0^2 I = 0, \qquad \omega_0 = \sqrt{\frac{\alpha^2 T_r}{LC}} \approx \sqrt{\frac{\alpha^2 T_0}{LC}}.$$

1c. Температура. Решение уравнения гармонических колебаний — $I = I_m \sin(\omega_0 t + \varphi)$; условие $I(0) = 0$ даёт $\varphi = 0$, то есть $I = I_m \sin \omega_0 t$. Температура связана с током: $T - T_r = \dfrac{L}{\alpha}\dot{I} = \dfrac{L\omega_0 I_m}{\alpha} \cos \omega_0 t$. В момент $t = 0$ она равна $T_0 - T_r$, поэтому амплитуда тока $I_m = \dfrac{\alpha(T_0 - T_r)}{L\omega_0} = (T_0 - T_r)\sqrt{\dfrac{C}{LT_r}}$ и

$$T(t) = T_r + (T_0 - T_r)\cos \omega_0 t.$$

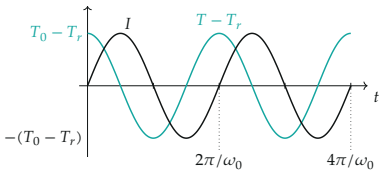


Рис. 1. Идеальный случай: температура и ток колеблются со сдвигом в четверть периода

Тело остывает до T_r за четверть периода — и, проскочив его, охлаждается ниже T_r, ток при этом максимален (рис. 1): тепловая энергия переходит в энергию магнитного поля и обратно.

Проверка. Размерность: αTI — мощность, поэтому α — В/К, и $\alpha^2 T/(LC)$ имеет размерность с^{-2}. Энергия: магнитная $\frac{1}{2}LI_m^2 = \frac{C(T_0-T_r)^2}{2T_r}$ — ровно то, что даёт идеальная тепловая машина, забирающая у тела тепло $C\,dT$ с КПД $(T-T_r)/T \approx (T-T_r)/T_r$: $\int C\frac{T-T_r}{T_r}\,dT = \frac{C(T_0-T_r)^2}{2T_r}$.

Пункт 2. Реальный случай: есть R и k.

2а. Уравнение для тока. Теперь в балансе тела три слагаемых (рис. 2): уходит αTI в элемент, уходит $k(T-T_r)$ теплопроводностью, приходит половина джоулева тепла $RI^2/2$ (вторая половина идёт в резервуар):

$$C\dot{T} = -\alpha TI - k(T-T_r) + \frac{RI^2}{2}.$$

В контуре добавляется падение напряжения на сопротивлении:

$$L\dot{I} = \alpha(T-T_r) - RI \quad\Rightarrow\quad T - T_r = \frac{L\dot{I} + RI}{\alpha}.$$

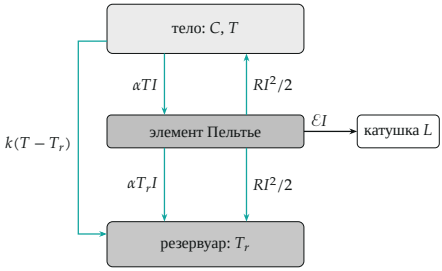


Рис. 2. Потоки энергии: через элемент, джоулево тепло (пополам), теплопроводность в обход, мощность в катушку

Дифференцируем второе уравнение: $L\ddot{I} + R\dot{I} = \alpha\dot{T}$. Подставляем $\dot{T}$ из первого, а температуру в нём — через $T = T_r + (L\dot{I} + RI)/\alpha$:

$$\alpha C\dot{T} = -\alpha^2 T_r I - \alpha LI\dot{I} - \alpha RI^2 - k(L\dot{I} + RI) + \frac{\alpha RI^2}{2}.$$

Умножаем $L\ddot{I} + R\dot{I} = \alpha\dot{T}$ на C и собираем всё в одну строку:

$$LC\ddot{I} + (RC + kL)\dot{I} + (kR + \alpha^2 T_r)I + \alpha L\, I\dot{I} + \frac{\alpha R}{2} I^2 = 0.$$

2b. Линеаризация. Три слагаемых уравнения — $\alpha^2 T_r I$, $\alpha L I\dot{I}$ и $\frac{\alpha R}{2} I^2$ — собираются в одно: $\alpha^2 I\Big[T_r + \frac{L\dot{I} + RI/2}{\alpha}\Big]$. Из уравнения Кирхгофа $\frac{L\dot{I} + RI}{\alpha} = T - T_r$, и по условию $|T - T_r| \ll T_r$. Обе добавки в скобке — порядка этой разности, поэтому в скобке остаётся одно T_r: слагаемые с $I\dot{I}$ и I^2 отбрасываем. Делим оставшееся на LC:

$$\ddot{I} + \Big(\frac{R}{L} + \frac{k}{C}\Big)\dot{I} + \frac{kR + \alpha^2 T_r}{LC} I = 0,$$

и сравнение с $\ddot{I} + 2\gamma\dot{I} + \omega^2 I = 0$ даёт

$$\gamma = \frac{R}{2L} + \frac{k}{2C}, \qquad \omega = \sqrt{\frac{kR + \alpha^2 T_r}{LC}}.$$

2c. Затухание за период. При $\gamma \ll \omega$ решение — колебания $I \propto e^{-\gamma t}\cos(\omega' t + \varphi)$ с частотой $\omega' = \sqrt{\omega^2 - \gamma^2} \approx \omega$; график лежит между двумя экспонентами $\pm I_{\max} e^{-\gamma t}$ (рис. 3). Соседние максимумы отстоят на период $2\pi/\omega$, поэтому амплитуда умножается на $e^{-2\pi\gamma/\omega}$. Показатель мал, $2\pi\gamma/\omega \ll 1$, и $e^{-x} \approx 1 - x$, откуда $I_{\max} - \Delta I_{\max} = I_{\max}(1 - 2\pi\gamma/\omega)$:

$$\frac{\Delta I_{\max}}{I_{\max}} = 2\pi\,\frac{\gamma}{\omega}.$$

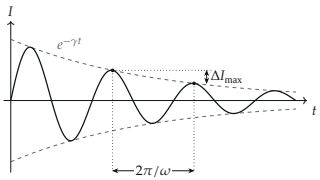


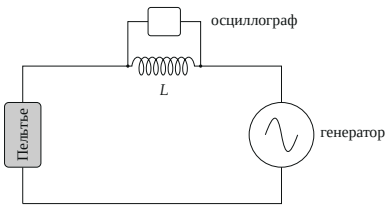
Рис. 3. Затухающие колебания (затухание увеличено)

Проверка. γ и ω — в с^{-1} ($R/L, k/C$ — обратные времена). При $R, k \to 0$: $\gamma \to 0$, $\omega \to \omega_0$ — идеальный случай п. 1; рост R или k гасит колебания быстрее.

Пункт 3. Измерение теплоёмкости. Все параметры в $\omega^2 = \dfrac{kR + \alpha^2 T_r}{LC}$ известны, кроме C, значит, достаточно измерить ω:

$$C = \frac{kR + \alpha^2 T_r}{L\,\omega^2}.$$

Частоту найдём резонансом (рис. 4, 5). Как у груза на пружине с трением под силой $F_0 \cos \Omega t$ (левая часть уравнения та же, что в п. 2b), амплитуда резко растёт при $\Omega \approx \omega$. Роль вынуждающей силы играет генератор, включённый последовательно в контур; осциллограф на катушке показывает $L\dot{I}$, то есть амплитуду тока. Меняем Ω, ищем максимум (его сдвиг $\sim \gamma^2/\omega$ пренебрежим) и по ω считаем C. Напряжение генератора берём малым, чтобы $|T - T_r| \ll T_r$. Второй способ — возбудить колебания и по осциллограмме найти γ из убыли амплитуды, тогда $C = \dfrac{k}{2\gamma - R/L}$.



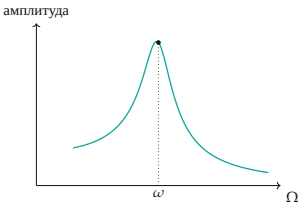


Рис. 4. Схема измерения. Рис. 5. Резонанс: амплитуда тока максимальна при $\Omega \approx \omega$

Ответ. 1) $LC\ddot{I} + \alpha^2 T_r I + \alpha L\,I\dot{I} = 0$; $\omega_0 = \alpha\sqrt{T_r/(LC)}$; $T(t) = T_r + (T_0 - T_r)\cos\omega_0 t$.

2) $LC\ddot{I} + (RC + kL)\dot{I} + (kR + \alpha^2 T_r)I + \alpha L\,I\dot{I} + \dfrac{\alpha R}{2} I^2 = 0$; $\gamma = \dfrac{R}{2L} + \dfrac{k}{2C}$, $\omega = \sqrt{(kR + \alpha^2 T_r)/(LC)}$; $|\Delta I_{\max}|/I_{\max} = 2\pi\gamma/\omega$.

3) Генератор в контур, по резонансу ω: $C = (kR + \alpha^2 T_r)/(L\omega^2)$.