Про зайчика

Задача 1. [МОШ 2019/20, 7 класс, задача 1] Геша измерял плотность маленького стеклянного зайчика. Он налил воду в мензурку с ценой деления 2 мл, при этом столб воды доходил до отметки 170 мл. После того, как Геша полностью погрузил зайчика на ниточке в воду, уровень воды поднялся до 180 мл. Далее Геша решил взвесить зайчика на школьных рычажных весах для лабораторных работ. Но гири у него были только массой 2 г. Получилось, что 12 гирь мало, чтобы уравновесить зайчика, а 13 — много. Не долго думая, Геша вычислил плотность зайчика:

$$\rho = \frac{25\ \text{г}}{180\ \text{мл} - 170\ \text{мл}} = 2500\ \text{кг/м}^3.$$

Пришёл Лёлик, назвал Гешу неумным человеком и сказал, что на самом деле значение плотности зайчика может сильно отличаться от значения, вычисленного Гешей. Известно, что Лёлик оценивает погрешность измерения объёма мензуркой в половину цены деления.

Чему может быть равна плотность зайчика?

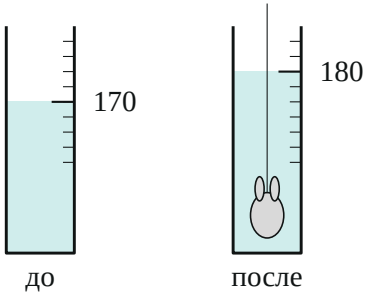

Рис. 1. Поясняющий рисунок: уровни воды в мензурке до и после погружения зайчика (мл)

▲ **Решение.** **Что происходит.** Ни объём, ни масса зайчика не измерены точно: каждое измерение даёт не число, а *интервал*. Плотность $\rho = m/V$ тогда тоже лежит в интервале. Наименьшая плотность получается при наименьшей возможной массе и наибольшем объёме, наибольшая

— наоборот. Это задача на оценку границ величины, вычисленной по неточным данным.

Обозначения: V_1 и V_2 — истинные уровни воды до и после погружения, $V = V_2 - V_1$ — объём зайчика, m — его масса.

1. Объём зайчика. Погрешность каждого отсчёта по мензурке — половина цены деления, 1 мл. Значит, 169 мл $\le V_1 \le$ 171 мл и 179 мл $\le V_2 \le$ 181 мл. Разность наибольшая, когда второй уровень на верхней границе, а первый — на нижней, и наименьшая — наоборот (рис. 2):

$$V_{\max} = 181 - 169 = 12 \text{ мл}, \qquad V_{\min} = 179 - 171 = 8 \text{ мл}.$$

Обратите внимание: погрешность разности вдвое больше погрешности одного отсчёта.

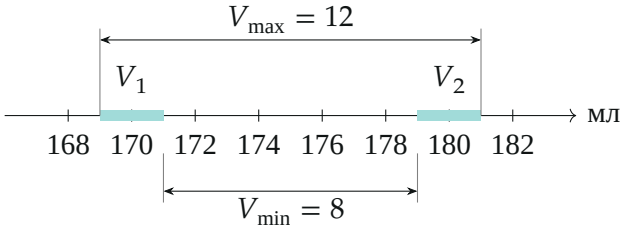

Рис. 2. Интервалы истинных уровней воды (выделены) и крайние значения объёма зайчика

2. Масса зайчика. Рычажные весы уравновешиваются, когда масса гирь равна массе тела. 12 гирь мало: $m > 12 \cdot 2$ г $= 24$ г; 13 гирь много: $m < 13 \cdot 2$ г $= 26$ г (рис. 3). Итак, 24 г $< m <$ 26 г — Геша взял середину, 25 г, но знать её он не мог.



Рис. 3. Взвешивание: с 12 гирями перевешивает зайчик, с 13 — гири; значит, 24 г $< m <$ 26 г

3. Границы плотности. Плотность $\rho = m/V$ растёт с массой и убывает с объёмом. Наименьшая — при наименьшей массе и наибольшем объёме, наибольшая — при наибольшей массе и наименьшем объёме:

$$\rho_{\min} = \frac{24\text{ г}}{12\text{ см}^3} = 2{,}0\ \frac{\text{г}}{\text{см}^3} = 2000\ \frac{\text{кг}}{\text{м}^3},$$

$$\rho_{\max} = \frac{26\text{ г}}{8\text{ см}^3} = 3{,}25\ \frac{\text{г}}{\text{см}^3} = 3250\ \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}.$$

Массы 24 и 26 г сами недостижимы (неравенства строгие), поэтому и границы плотности не включаются (рис. 4).



Рис. 4. Возможные значения плотности зайчика (концы не включены); значение Геши — лишь одна точка интервала

Обратите внимание. Относительная неточность объёма велика: ± 2 мл от 10 мл — это $\pm 20\,\%$. Именно поэтому разброс плотности такой большой; погрешность массы (± 1 г из 25 г, 4 %) почти не влияет.

Проверка. Размерность: г/см^3, 1 г/см^3 $= 1000$ кг/м^3. Второй способ оценки — через относительные погрешности: $\rho = 2500 \cdot \dfrac{1 \pm 0{,}04}{1 \mp 0{,}2}$ даёт от $2500 \cdot 0{,}96/1{,}2 = 2000$ до $2500 \cdot 1{,}04/0{,}8 = 3250$ кг/м^3 — совпало. Предел: с точной мензуркой (погрешность $\to 0$) интервал сжался бы до 2400 … 2600 кг/м^3, и Геша был бы почти прав.

Смысл: Лёлик прав — плотность стекла (около 2500 кг/м^3) попадает в интервал, но такими приборами отличить стекло от, например, алюминия (2700 кг/м^3) нельзя.

Ответ. $\dfrac{24\text{ г}}{12\text{ см}^3} < \rho < \dfrac{26\text{ г}}{8\text{ см}^3}$, то есть 2000 кг/м^3 $< \rho <$ 3250 кг/м^3.