Переходы

Задача 2. [МОШ 2019/20, 7 класс, задача 2] Дядя Вова живёт в области, а работает в Москве, до которой едет на электричке. Путь от железнодорожной платформы до места работы составляет 400 метров. На этом пути дядя Вова преодолевает два пешеходных перехода длиной 20 метров, которые разделяет сорокаметровая маленькая площадь. Светофор на каждом переходе включает зелёный сигнал на 25 секунд, а красный — на две минуты. Дядя Вова ходит не спеша, со скоростью не более 1 м/с. Обозначим t_1 — минимальное время, за которое дядя Вова может дойти от вокзала до работы, а t_2 — минимальное время на обратную дорогу. Интервал времени между включением зелёного сигнала на первом светофоре на пути от вокзала и включением зелёного сигнала на втором обозначим T. Дядя Вова соблюдает правила, поэтому он выходит на «зебру» перехода только в том случае, если до окончания зелёного сигнала светофора остаётся 20 секунд и более. В противном случае он дорогу не переходит.

1. Пусть время T равно 60 с. Найдите время t_1 и время t_2.
2. Чему равно время T, если $t_1 = t_2$?

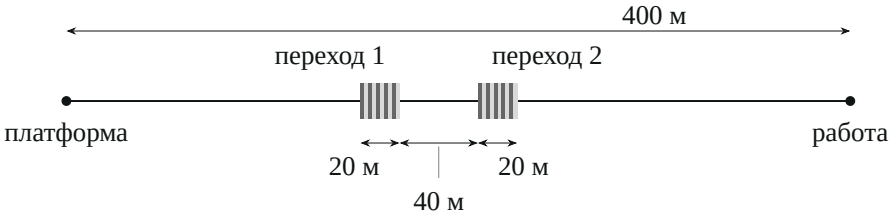

Рис. 1. Поясняющий рисунок: путь от платформы до работы; где именно на пути переходы, не важно

▲ **Решение. Что происходит.** Без светофоров дорога заняла бы 400 м : 1 м/с = 400 с. Время сверх этого — только ожидание у светофоров (идти медленнее не выгоднее, чем постоять). Светофор работает с периодом $25 + 120 = 145$ с, а ступить на зебру можно лишь в первые $25 - 20 = 5$ с зелёного. Переход длиной 20 м при скорости 1 м/с занимает ровно 20 с — как раз успевает до красного. Значит, задача про совпадение моментов:

успевает ли дядя Вова к «окну» второго светофора, выйдя с первого. Это задача на периодические процессы — удобно рисовать моменты на оси времени.

Обозначения. Время отсчитываем от включения зелёного на переходе 1. «Окна» — промежутки, когда можно ступить на зебру: у перехода 1 — $[0;\,5]$ с (и через каждые 145 с), у перехода 2 — $[T;\,T+5]$ с. От входа на один переход до подхода к другому — $20+40=60$ с (переход и площадь), $\tau = 60$ с. Ожидание дорогой туда — w_1, обратно — w_2; тогда $t_1 = 400\text{ с} + w_1$, $t_2 = 400\text{ с} + w_2$.

Пункт 1. 1. Дорога на работу при $T = 60$ с. Дядя Вова может выйти с платформы так, чтобы подойти к переходу 1 в его окно, без ожидания. Ступив на зебру в момент $s \in [0;\,5]$, он подходит к переходу 2 в момент $s+\tau \in [60;\,65]$ — точно в окно $[T;\,T+5]=[60;\,65]$ (рис. 2). Ждать не нужно:

$$w_1 = 0, \qquad t_1 = 400\text{ с}.$$

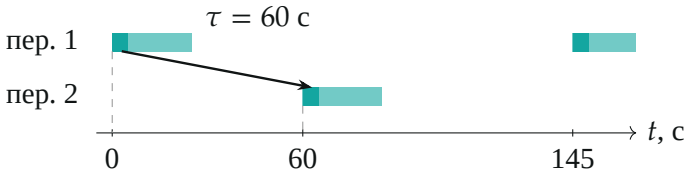

Рис. 2. Дорога на работу при $T = 60$ с: полосы — зелёный сигнал, тёмная часть — окно (первые 5 с, когда можно ступить на зебру). Выйдя в окно перехода 1, дядя Вова через 60 с попадает в окно перехода 2

2. Дорога домой при $T = 60$ с. Теперь первым идёт переход 2. Ступив на него в момент $u \in [60;\,65]$, дядя Вова подходит к переходу 1 в момент $u+\tau \in [120;\,125]$. Ближайшее окно перехода 1 — $[145;\,150]$ (рис. 3). Ожидание наименьшее, если идти по переходу 2 как можно позже, $u = 65$: подход в 125 с, ждать до 145 с:

$$w_2 = 145 - 125 = 20\text{ с}, \qquad t_2 = 420\text{ с}.$$

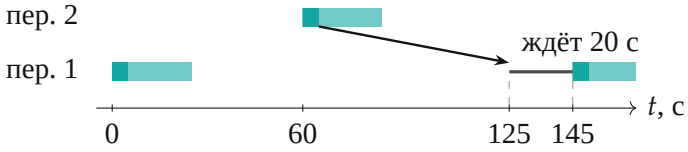

Рис. 3. Дорога домой при $T = 60$ с: с перехода 2 дядя Вова приходит к переходу 1 в 120–125 с, а окно открывается только в 145 с — ожидание не меньше 20 с

Пункт 2. 3. Ожидание при любом T. Дорогой на работу дядя Вова подходит к переходу 2 в промежуток $[60; 65]$ (по модулю 145 с), а окно — $[T; T + 5]$. Если они пересекаются, $w_1 = 0$; иначе он, выйдя как можно позже (в 65 с), ждёт до ближайшего начала окна. Дорогой домой: подход к переходу 1 в $[T + 60; T + 65]$, окно $[0; 5]$ — так же. Получаем (рис. 4):

$$w_1 = \begin{cases} T + 80, & 0 \le T < 55, \\ 0, & 55 \le T \le 65, \\ T - 65, & 65 < T < 145; \end{cases} \qquad w_2 = \begin{cases} 80 - T, & 0 \le T < 80, \\ 0, & 80 \le T \le 90, \\ 225 - T, & 90 < T < 145. \end{cases}$$

Проверим одну строку: при $T = 72{,}5$ с к переходу 2 дядя Вова приходит не позже 65 с, а окно открывается в 72,5 с — ждать 7,5 с, то есть $w_1 = T - 65$.

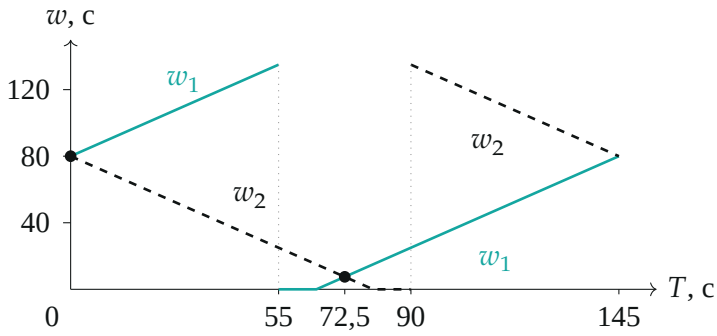

Рис. 4. Ожидание по дороге на работу w_1 (сплошная) и домой w_2 (пунктир) в зависимости от сдвига светофоров T. Равны они только при $T = 0$ и $T = 72{,}5$ с (точки); при $T = 145$ с картина повторяет $T = 0$

4. Когда $t_1 = t_2$. Условие $t_1 = t_2$ равносильно $w_1 = w_2$. Переберём участки:

- $0 \le T < 55$: $T + 80 = 80 - T$, отсюда $T = 0$ (ожидание по 80 с в обе стороны);
- $55 \le T \le 65$: $w_1 = 0$, а $w_2 = 80 - T \ge 15$ с — не равны;
- $65 < T < 80$: $T - 65 = 80 - T$, отсюда $T = 72{,}5$ с (ожидание по 7,5 с);
- $80 \le T \le 90$: $w_2 = 0$, а $w_1 = T - 65 \ge 15$ с — не равны;
- $90 < T < 145$: $T - 65 = 225 - T$ даёт $T = 145$ с — это то же, что $T = 0$.

Итак, $T = 0$ или $T = 72{,}5$ с.

Обратите внимание. При $T = 0$ светофоры включаются одновременно, и ожидание огромное: через 60 с после первого окна второй светофор уже давно красный, ждать 80 с в обе стороны. Равенство времён ещё не значит, что дорога быстрая.

Проверка. При $T = 72{,}5$: туда — вход на переход 1 в 5 с, подход к переходу 2 в 65 с, окно $[72{,}5;\ 77{,}5]$ — ждать 7,5 с; обратно — вход на переход 2 в 77,5 с, подход к переходу 1 в 137,5 с, окно $[145;\ 150]$ — ждать 7,5 с. Равны. Для $T = 60$: $w_1 + w_2 = 20$ с, для $T = 72{,}5$: 15 с — сумма ожиданий $w_1 + w_2 = 15$ с на всём участке $65 \le T \le 80$, как и должно быть из формул ($T - 65 + 80 - T = 15$).

Смысл: «зелёная волна» на работу ($T = 60$) делает дорогу домой медленнее; поровну ожидание делится при сдвиге светофоров на 72,5 с — половину периода.

Ответ. 1) $t_1 = 400$ с, $t_2 = 420$ с; 2) $T = 0$ или $T = 72{,}5$ с.