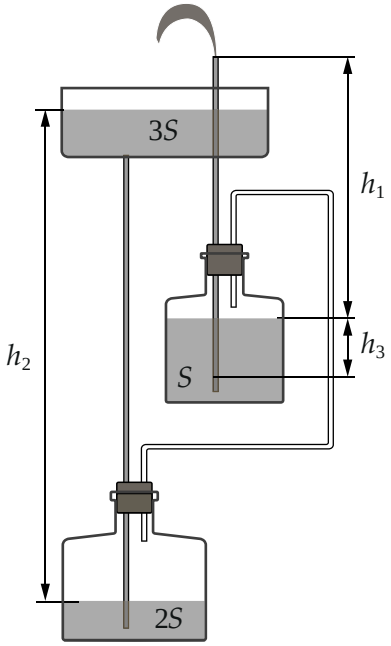
Фонтан Герона

Задача 3. [МОШ 2019/20, 7 класс, задача 3] На рисунке ниже изображена схема «Фонтана Герона». Три сосуда с вертикальными стенками, площади оснований которых указаны на рисунке ($S = 100$ см^2), соединены системой трубок с площадью сечения $S_1 = 10$ мм^2. Суммарный объём воздуха в нижних сосудах остаётся при работе фонтана постоянным.



Вся вода, выходящая из верхней трубки и образующая фонтан, в итоге оказывается в верхнем сосуде. Квадрат скорости воды v на выходе из трубки определяется выражением

$$v^2 = \alpha(h_2 - h_1),$$

где α — неизвестный коэффициент пропорциональности, расстояния h_1 и h_2 показаны на рисунке. В процессе работы фонтана расстояния h_1, h_2 и h_3 меняются.

1. Как изменяется уровень воды в верхнем сосуде в процессе работы фонтана?

В некоторый момент времени указанные на рисунке расстояния равны: $h_1 = 35$ см, $h_2 = 60$ см, а скорость воды, бьющей из трубочки, равна $v = 2{,}0$ м/с.

2. Найдите скорости изменения уровней воды в нижних сосудах в этот момент времени.
3. По истечении некоторого времени уровень воды в среднем сосуде опустится на величину $h_3 = 6$ см, при этом нижний сосуд ещё не заполнится. Чему равна в этот момент скорость воды на выходе из трубки?

▲ **Решение.** **Что происходит.** Вода из верхнего сосуда по трубке стекает в нижний и сжимает в нём воздух. Этот воздух по второй трубке давит на воду в среднем сосуде и выталкивает её вверх — получается фонтан, вода которого снова падает в верхний сосуд. Воздух в двух нижних сосудах — общий, и его объём постоянен: сколько воды прибыло в нижний сосуд, столько же ушло из среднего. Это задача на сохранение объёма (несжимаемость воды и постоянство объёма воздуха): уравнения «сколько втекло — столько вытекло» для каждого сосуда.

Обозначения (рис. 2): u_1 — скорость, с которой опускается уровень в среднем сосуде (площадь S), u_2 — скорость подъёма уровня в нижнем сосуде (площадь $2S$), u_3 — скорость изменения уровня в верхнем сосуде (площадь $3S$), $q = vS_1$ — объём воды, выходящей из трубки фонтана за единицу времени, q' — объём, стекающий из верхнего сосуда в нижний за единицу времени.

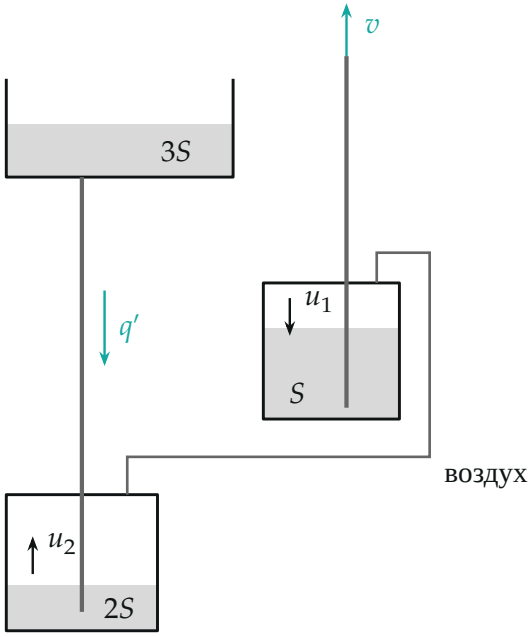


Рис. 2. Схема потоков: вода фонтана $q = vS_1$ возвращается в верхний сосуд, оттуда поток q' стекает в нижний; уровень в среднем сосуде опускается со скоростью u_1, в нижнем поднимается со скоростью u_2

Пункт 1. 1. Объём воздуха постоянен. За малое время Δt в нижний сосуд прибывает объём $2S\,u_2\Delta t$, из среднего уходит $S\,u_1\Delta t$. Объём воздуха над ними не меняется, поэтому эти объёмы равны:

$$2S\,u_2 = S\,u_1 \quad \Rightarrow \quad u_1 = 2u_2.$$

2. Средний сосуд. Вода покидает его только через трубку фонтана:

$$S\,u_1 = v\,S_1 = q.$$

3. Верхний сосуд. В него приходит вся вода фонтана q, а уходит — в нижний сосуд, $q' = 2S\,u_2$. Изменение объёма воды в нём за единицу времени

$$3S\,u_3 = q - q' = S\,u_1 - 2S\,u_2 = 0.$$

Уровень воды в верхнем сосуде *не изменяется*: сколько воды приносит

фонтан, столько уходит вниз.

Пункт 2. 4. Скорости уровней. Из шагов 2 и 1:

$$u_1 = \frac{vS_1}{S} = \frac{2{,}0\ \text{м/с} \cdot 10 \cdot 10^{-6}\ \text{м}^2}{100 \cdot 10^{-4}\ \text{м}^2} = 2\ \text{мм/с},$$

$$u_2 = \frac{u_1}{2} = 1\ \text{мм/с}.$$

В среднем сосуде уровень опускается на 2 мм в секунду, в нижнем поднимается на 1 мм в секунду.

Пункт 3. 5. Почему фонтан бьёт. Сжатый воздух в нижних сосудах держит столб воды от уровня верхнего сосуда до уровня нижнего — высотой h_2; этот же воздух поднимает воду среднего сосуда на высоту h_1 до выхода трубки. Скорость струи определяет избыток $h_2 - h_1$ (рис. 3) — это и записано в условии формулой $v^2 = \alpha(h_2 - h_1)$. Значит, надо понять, как меняется разность $h_2 - h_1$.

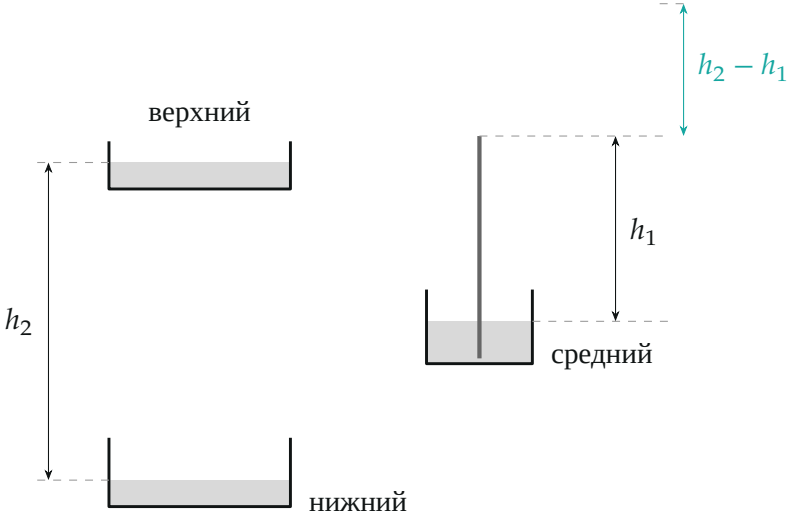


Рис. 3. Уровни в масштабе при $h_1 = 35$ см, $h_2 = 60$ см: давление воздуха держит столб h_2, а поднять воду среднего сосуда надо лишь на h_1; избыток $h_2 - h_1 = 25$ см (отложен над выходом трубки) разгоняет струю

6. Как меняются h_1 и h_2. Выход трубки неподвижен, а уровень среднего сосуда опустился на $h_3 = 6$ см, поэтому h_1 выросло на h_3. Уровень верхнего сосуда не меняется (пункт 1), а уровень нижнего поднялся вдвое меньше, на $h_3/2$ (шаг 1: $u_2 = u_1/2$), поэтому h_2 уменьшилось на $h_3/2$:

$$\Delta h_{\text{нач}} = h_2 - h_1 = 60 - 35 = 25 \text{ см},$$

$$\Delta h_{\text{кон}} = \left(h_2 - \frac{h_3}{2}\right) - (h_1 + h_3) = 25 - \frac{3}{2} \cdot 6 = 16 \text{ см}.$$

7. Скорость струи. Коэффициент α неизвестен, но он один и тот же, поэтому поделим формулу условия для конца на неё же для начала — α сократится:

$$\frac{v_{\text{кон}}^2}{v^2} = \frac{\Delta h_{\text{кон}}}{\Delta h_{\text{нач}}} \quad \Rightarrow \quad v_{\text{кон}} = v\sqrt{\frac{16}{25}} = 2{,}0 \cdot 0{,}8 \text{ м/с} = 1{,}6 \text{ м/с}.$$

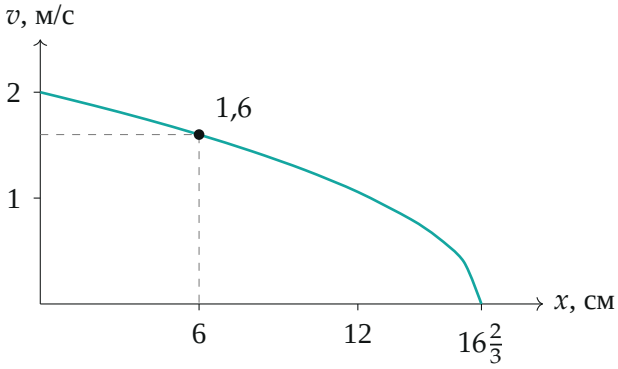


Рис. 4. Скорость струи в зависимости от того, на сколько x опустился уровень в среднем сосуде: $v = 2{,}0\ \text{м/с} \cdot \sqrt{1 - 1{,}5x/25\ \text{см}}$; при $x = 16\frac{2}{3}$ см фонтан остановится (если вода в среднем сосуде не кончится раньше)

Обратите внимание. Нижний уровень поднимается вдвое медленнее, чем опускается средний, но оба изменения уменьшают разность $h_2 - h_1$: она падает на $\frac{3}{2}h_3$, а не на h_3. Отсюда 16 см, а не 19 см.

Проверка. Размерность $u_1 = vS_1/S$ — м/с. Объёмы: за 1 с из среднего сосуда уходит 100 см$^2 \cdot 0{,}2$ см $= 20$ см^3, в нижний приходит 200 см$^2 \cdot$

0,1 см $=$ 20 см^3, через трубку проходит 0,1 см$^2 \cdot$ 200 см/с $=$ 20 см^3 — всё сходится. Предел: при $h_3 \to 0$ получаем исходные 2,0 м/с.

Смысл: фонтан Герона работает, пока уровень верхнего сосуда выше нижнего больше, чем выход трубки над средним; вода переливается по кругу, и запас «напора» постепенно тратится.

Ответ. 1) уровень не изменяется; 2) в среднем сосуде опускается со скоростью $u_1 = vS_1/S = 2$ мм/с, в нижнем поднимается со скоростью $u_2 = u_1/2 = 1$ мм/с; 3) $v_{\text{кон}} = v\sqrt{\dfrac{h_2 - h_1 - \frac{3}{2}h_3}{h_2 - h_1}} = 1{,}6$ м/с.