Мокрый песок

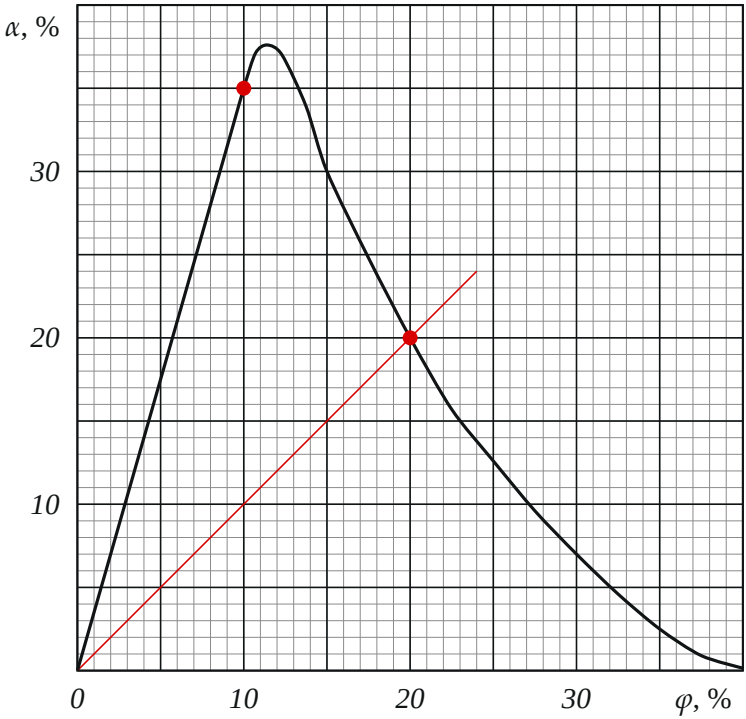
Задача 4. [МОШ 2019/20, 7 класс, задача 4] Строительный песок часто добывается со дна рек или карьеров. Такой песок содержит воду, что количественно характеризует влажность песка, равная

$$\varphi = \frac{m_{\text{вод}}}{m_{\text{п}}}.$$

$m_{\text{вод}}$ — масса воды (в мокром песке), $m_{\text{п}}$ — масса песка без воды. Объём влажного песка $V_{\text{вл}}$ сильно зависит от его влажности. Обозначим

$$\alpha = \frac{V_{\text{вл}} - V_{\text{сух}}}{V_{\text{сух}}},$$

относительное изменение объёма песка при его увлажнении. Приближённый график зависимости $\alpha(\varphi)$ приведён на рисунке. Значения влажности песка и относительного изменения объёма выражены в процентах.



1. Определите значение влажности, при которой плотность влажного песка равна плотности сухого.
2. Объём порции влажного песка складывается из объёма песчинок, объёма воды и объёма воздушных полостей: $V_{\text{вл}} = V_{\text{п}} + V_{\text{вод}} + V_{\text{возд}}$. Когда небольшое количество воды попадает в песок вода обволакивает песчинки за счёт капиллярных сил и отдаляет их друг от друга. Предположим, что объём воды в песке и объём воздушных полостей связаны соотношением $V_{\text{возд}} = k \cdot V_{\text{вод}} + V_{\text{возд}}^{(0)}$, $V_{\text{возд}}^{(0)}$ — объём воздушных полостей при нулевой влажности. Можно ли считать коэффициент пропорциональности k постоянным на всём возрастающем прямолинейном участке графика? Найдите значение коэффициента k в середине этого участка графика. Плотность сухого песка $\rho_{\text{сух}}$ в 1,6 раз больше плотности воды $\rho_{\text{вод}}$.

▲ **Решение. Что происходит.** Влажный песок тяжелее сухого (добави-

лась вода), но и объём его больше (вода раздвигает песчинки). Плотность $\rho = m/V$ зависит от того, что растёт быстрее. На графике это видно сразу, если выразить плотность через φ и α. Во втором пункте модель с коэффициентом k даёт для α формулу, которую сравниваем с прямолинейным участком графика. Это задача на плотность смеси: масса и объём складываются из частей.

Обозначения: порция песка массой $m_{\text{п}}$; в сухом виде её объём $V_{\text{сух}} = V_{\text{п}} + V^{(0)}_{\text{возд}}$, во влажном — $V_{\text{вл}} = (1+\alpha)V_{\text{сух}}$; масса воды $m_{\text{вод}} = \varphi m_{\text{п}}$, её объём $V_{\text{вод}} = m_{\text{вод}}/\rho_{\text{вод}}$; $\rho_{\text{вл}}$ и $\rho_{\text{сух}} = m_{\text{п}}/V_{\text{сух}}$ — плотности влажного и сухого песка.

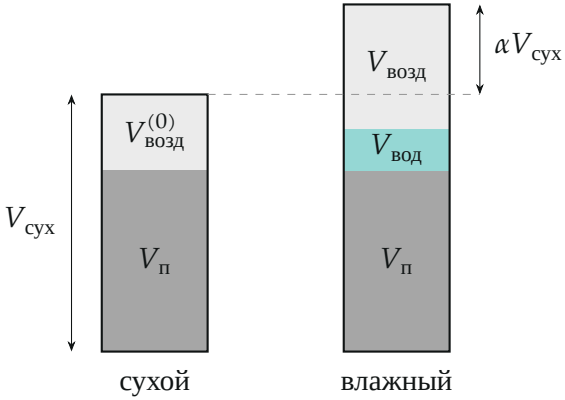


Рис. 2. Из чего складывается объём одной и той же порции песка в сухом и во влажном виде (при $\varphi = 10\,\%$, $\alpha = 35\,\%$; объём песчинок $V_{\text{п}}$ не меняется; пропорции соблюдены)

Пункт 1. 1. Плотность влажного песка. Масса влажной порции — песок плюс вода: $m_{\text{п}}(1+\varphi)$; объём — $(1+\alpha)V_{\text{сух}}$. Значит,

$$\rho_{\text{вл}} = \frac{m_{\text{п}}(1+\varphi)}{V_{\text{сух}}(1+\alpha)} = \rho_{\text{сух}}\,\frac{1+\varphi}{1+\alpha}.$$

2. Условие равенства плотностей. $\rho_{\text{вл}} = \rho_{\text{сух}}$ при $1+\varphi = 1+\alpha$, то есть при

$$\alpha = \varphi.$$

На графике это точка пересечения кривой $\alpha(\varphi)$ с прямой $\alpha = \varphi$ (на графике условия она проведена). Кроме тривиальной точки $\varphi = 0$, пересечение одно — на спадающем участке, при

$$\varphi = 20\,\%.$$

Левее этой точки ($0 < \varphi < 20\,\%$) $\alpha > \varphi$ и влажный песок легче сухого, правее — тяжелее (рис. 3).

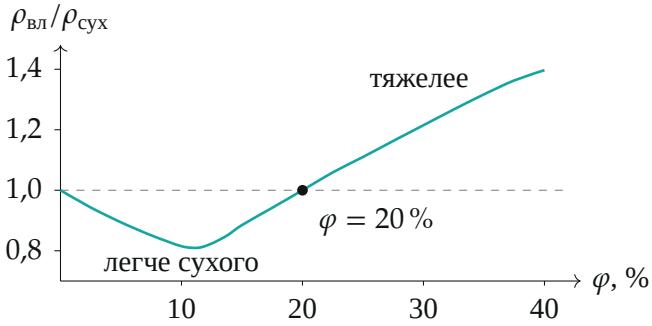


Рис. 3. Отношение плотностей $\rho_{вл}/\rho_{сух} = (1+\varphi)/(1+\alpha)$, вычисленное по точкам графика условия; равно единице при $\varphi = 20\,\%$

Пункт 2. 3. Объём влажного песка в модели. Объём песчинок не меняется, поэтому прирост объёма — это вода плюс прирост воздушных полостей:

$$V_{вл} - V_{сух} = V_{вод} + (V_{возд} - V_{возд}^{(0)}) = V_{вод} + kV_{вод} = (k+1)\,V_{вод}.$$

Делим на $V_{сух}$ и подставляем $V_{вод} = \dfrac{\varphi m_п}{\rho_{вод}}$, $V_{сух} = \dfrac{m_п}{\rho_{сух}}$:

$$\alpha = (k+1)\,\varphi\,\frac{\rho_{сух}}{\rho_{вод}} = 1{,}6\,(k+1)\,\varphi.$$

4. Сравнение с графиком. Возрастающий прямолинейный участок графика идёт от начала координат до точки $(10\,\%;\ 35\,\%)$, то есть на нём

$$\alpha = 3{,}5\,\varphi.$$

Модель даёт прямую через начало координат с наклоном $1{,}6(k+1)$. Отношение α/φ на всём участке одно и то же, 3,5, значит, k на всём участке *постоянен* — в том числе в его середине ($\varphi = 5\,\%$, $\alpha = 17{,}5\,\%$):

$$1{,}6\,(k+1) = 3{,}5 \quad \Rightarrow \quad k = \frac{3{,}5}{1{,}6} - 1 = 1{,}1875 \approx 1{,}19.$$

Если бы k менялся, α росло бы не по прямой: на рис. 4 штриховые прямые показывают наклоны при других k.

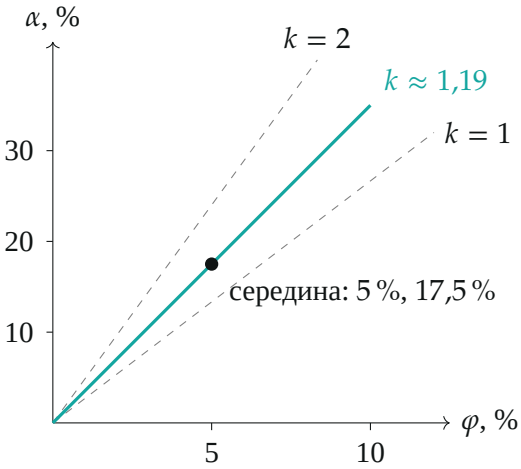


Рис. 4. Прямолинейный участок графика $\alpha = 3{,}5\varphi$ (сплошная) и прямые модели $\alpha = 1{,}6(k+1)\varphi$ при $k = 1$ и $k = 2$ (штрих)

Обратите внимание. Плотность влажного песка сравнивается с плотностью сухого не по графику напрямую, а через формулу $\rho_{\text{вл}}/\rho_{\text{сух}} = (1+\varphi)/(1+\alpha)$: точка максимума объёма ($\varphi \approx 11\,\%$) — это не равенство плотностей, а наименьшая плотность.

Проверка. Пункт 1: при $\varphi = 20\,\%$ масса порции $1{,}2m_{\text{п}}$, объём $1{,}2V_{\text{сух}}$ — плотность та же. Пункт 2: при $\varphi = 10\,\%$ и $k = 1{,}1875$ получаем $\alpha = 1{,}6 \cdot 2{,}1875 \cdot 10\,\% = 35\,\%$ — точка графика. Размерность: k — отношение объёмов, безразмерно. Знак: $k > 0$, то есть воздушных полостей с водой становится больше — вода раздвигает песчинки, как и сказано в условии.

Смысл: на каждый кубический сантиметр воды, вошедшей в слегка влажный песок, объём пустот растёт ещё примерно на 1,2 см^3 — поэтому немного влажный песок рыхлее и легче сухого.

Ответ. 1) $\varphi = 20\,\%$ (где $\varkappa = \varphi$); 2) да, на прямолинейном участке $\varkappa = 1{,}6(k+1)\varphi = 3{,}5\varphi$, k постоянен и равен $\dfrac{3{,}5}{1{,}6} - 1 \approx 1{,}19$.