Крионасос

Задача 1. [МОШ 2019/20, 8 класс, задача 1] В криогенном эксперименте поток газообразного азота, распространяющийся в вакуумной камере, направляется на охлаждаемую до низкой температуры $T_c = -243°\text{C}$ поверхность (криопанель), на которой газ может превращаться в твёрдое тело (процесс десублимации). Скорость потока азота равна $v = 200$ м/с и направлена перпендикулярно криопанели, температура в потоке равна $T_0 = -173°\text{C}$. Определите максимальное значение плотности газообразного азота, при котором на криопанели десублимируется весь натекающий газ. Холодильное оборудование может обеспечить отвод тепла в количестве не более, чем 0,4 Дж с 1 см^2 поверхности криопанели за 1 секунду. Удельная теплота сублимации азота равна $L = 225$ кДж/кг. Удельная теплоёмкость азота (при данных условиях) равна $c = 1{,}0$ кДж/(кг·°C). Площадь сечения потока на входе равна площади криопанели. Кинетической энергией натекающего газа можно пренебречь.

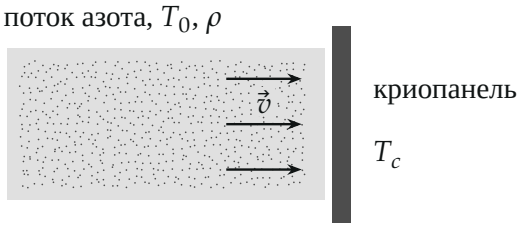

Рис. 1. Поясняющий рисунок: поток газа натекает на холодную криопанель по нормали

▲ **Решение. Что происходит.** Каждую секунду на панель приходит новая порция газа. Чтобы она вся осела твёрдым азотом, её надо сначала охладить от T_0 до T_c, а потом отнять теплоту десублимации. Чем плотнее газ, тем больше масса порции и тем больше теплоты надо отвести; холодильник отводит не больше $q = 0{,}4$ Дж с 1 см^2 за 1 с. Главная идея — считать всё *на единицу площади за единицу времени*: тогда площадь панели и время сократятся сами. Ключевой закон — уравнение теплового баланса.

Обозначения: S — площадь панели (сечения потока), Δt — промежуток времени, Δm — масса газа, пришедшего на панель за Δt, Q — теплота, которую надо от неё отвести, $q = 0{,}4$ Дж/(см$^2 \cdot$ с) $= 4 \cdot 10^3$ Вт/м^2 — предельная мощность отвода тепла с единицы площади.

1. Масса газа, пришедшего за Δt. За время Δt до панели долетает весь газ, который был от неё не дальше $v\Delta t$: это цилиндр с основанием S и высотой $v\Delta t$ (рис. 2). Его масса

$$\Delta m = \rho S v \Delta t.$$

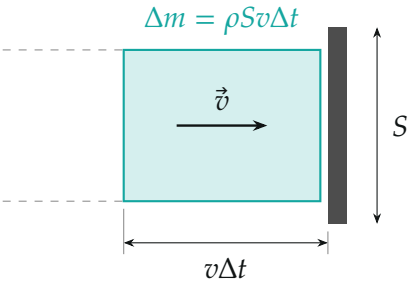

Рис. 2. За время Δt на панель попадает газ из цилиндра длиной $v\Delta t$ (выделен)

2. Сколько теплоты надо отнять у этой порции. Газ проходит два этапа (рис. 3): остывает в газообразном состоянии от T_0 до T_c и затем при T_c превращается в твёрдое тело:

$$Q = c\,\Delta m\,(T_0 - T_c) + L\,\Delta m = \Delta m\,(c(T_0 - T_c) + L).$$

Разность температур $T_0 - T_c = -173°\text{C} - (-243°\text{C}) = 70°\text{C}$, поэтому с каждого килограмма газа надо отвести

$$c(T_0 - T_c) + L = 1{,}0 \cdot 70 \text{ кДж/кг} + 225 \text{ кДж/кг} = 295 \text{ кДж/кг}.$$

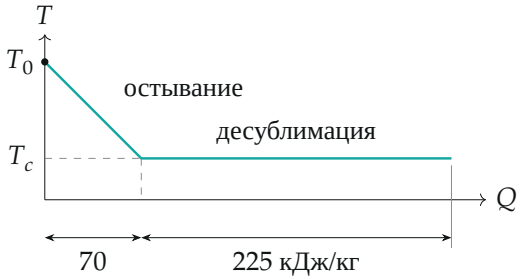

Рис. 3. Что происходит с килограммом газа на панели: остывание даёт 70 кДж, десублимация — 225 кДж; по горизонтали — отведённая теплота Q, масштаб соблюдён

3. Тепловой баланс на единицу площади за единицу времени. Весь газ успевает осесть, если теплоту Q холодильник отводит за то же время Δt, за которое газ пришёл: $Q \le qS\Delta t$. Подставим Q и Δm:

$$\rho\, S\, v\, \Delta t\, (c(T_0 - T_c) + L) \le q\, S\, \Delta t.$$

Площадь S и время Δt сократились — поэтому и не важно, какие у панели размеры. Отсюда

$$\rho \le \rho_{\max} = \frac{q}{v\,(c(T_0 - T_c) + L)} = \frac{4 \cdot 10^3}{200 \cdot 2{,}95 \cdot 10^5}\ \frac{\text{кг}}{\text{м}^3} \approx 6{,}8 \cdot 10^{-5}\ \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}.$$

Знак «≤» значит: при плотности меньше $\rho_{\max}$ холодильник справляется с запасом, при большей часть газа не успевает осесть (рис. 4).

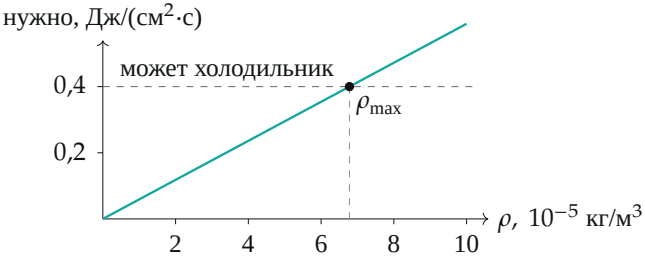

Рис. 4. Сколько тепла надо отводить с 1 см^2 за 1 с в зависимости от плотности газа ($\rho v \cdot 295$ кДж/кг) и предел холодильника 0,4 Дж/(см^2·с)

Обратите внимание. Площадь панели в условии не дана, и она не нужна: и приток газа, и отвод тепла пропорциональны площади. Данные «0,4 Дж с 1 см^2 за 1 с» — это мощность на единицу площади, $q = 0{,}4 \cdot 10^4$ Вт/м^2; перевод см^2 в м^2 — место частой ошибки в 10^4 раз.

Проверка. Размерность: $\dfrac{\text{Вт/м}^2}{(\text{м/с}) \cdot (\text{Дж/кг})} = \dfrac{\text{Дж}/(\text{с} \cdot \text{м}^2)}{\text{Дж}/(\text{кг} \cdot \text{с}) \cdot \text{м}} = \dfrac{\text{кг}}{\text{м}^3}$. Пересчёт назад: за 1 с на 1 см^2 $= 10^{-4}$ м^2 приходит $6{,}78 \cdot 10^{-5} \cdot 200 \cdot 10^{-4}$ кг $= 1{,}36 \cdot 10^{-6}$ кг, и на него нужно $1{,}36 \cdot 10^{-6} \cdot 2{,}95 \cdot 10^5 \approx 0{,}40$ Дж — ровно предел. Предел: при $v \to 0$ газ почти не приходит, и допустимая плотность растёт неограниченно.

Смысл: криопанель работает как насос только для очень разреженного газа — плотность примерно в $2 \cdot 10^4$ раз меньше, чем у азота при атмосферном давлении.

Ответ. $\rho_{\max} = \dfrac{q}{v\,(c(T_0 - T_c) + L)} \approx 6{,}8 \cdot 10^{-5}$ кг/м^3, где $q = 0{,}4$ Дж/(см^2·с).