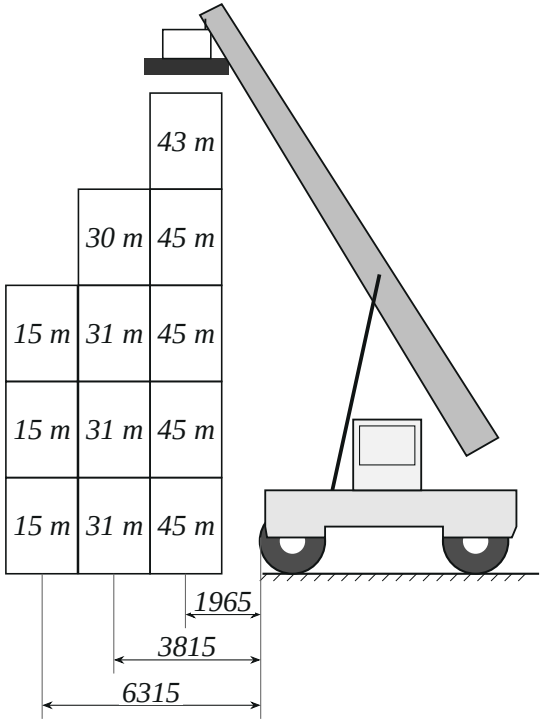
Ричстакер

Задача 2. [МОШ 2019/20, 8 класс, задача 2] Рисунок справа, на котором изображён погрузчик для работы с контейнерами («ричстакер»), воспроизводит схему из буклета производителя, китайской фирмы «Sany». Прямоугольники символизируют контейнеры, масса которых указана в тоннах. Линейные размеры даны в миллиметрах. Масса этого ричстакера составляет 72 тонны, расстояние между осями передних и задних колёс равно 6 м, внешний диаметр покрышки колеса равен 1670 мм. Рисунок показывает, что при данном расположении погрузчик может приподнять любой из изображённых контейнеров (предварительно убрав другие). При этом угол наклона стрелы и её длина могут изменяться.



1. Пусть ричстакер «разбирает» ближайшую к себе стопку контейнеров. На какую максимальную величину изменяется сила давления

передних колёс на поверхность земли в момент, когда погрузчик приподнимает контейнер из этой стопки? Считайте, что в момент подъёма каждого из контейнеров положение погрузчика в точности совпадает с показанным на рисунке.

2. На каком расстоянии по горизонтали от оси заднего колеса может располагаться центр тяжести погрузчика, если для его безопасной работы необходимо, чтобы сила давления пары колёс (передних или задних) всегда была не меньше шестой части веса погрузчика?

Считайте, что при изменении длины стрелы и её наклона центр тяжести погрузчика по горизонтали практически не смещается, ускорение свободного падения равно $g = 10$ Н/кг.

▲ **Решение. Что происходит.** Погрузчик стоит неподвижно, поэтому сумма сил и сумма моментов сил, действующих на него, равны нулю. Это задача о равновесии рычага: опоры — передние и задние колёса, нагрузки — вес погрузчика и вес поднятого контейнера, который висит *впереди* передних колёс. Поднимая контейнер, погрузчик нагружает передние колёса и разгружает задние — значит, опасен «клевок» вперёд.

Обозначения (рис. 2): $M = 72$ т — масса погрузчика, $l = 6$ м — расстояние между осями, $R = 0{,}835$ м — радиус колеса, y — расстояние по горизонтали от оси задних колёс до центра тяжести погрузчика, m — масса поднятого контейнера, D — расстояние по горизонтали от оси передних колёс до центра контейнера, N_1 и N_2 — силы, с которыми земля давит на передние и задние колёса (по третьему закону Ньютона они равны силам давления колёс на землю). Колесо касается земли под своей осью, так что плечи считаем от осей.

Где центры стопок. Размеры на рисунке отложены от передней кромки покрышки до середин стопок; ось колеса дальше от стопок ещё на радиус $R = 835$ мм. Поэтому

$$D_3 = 1{,}965 + 0{,}835 = 2{,}80 \text{ м} \quad \text{(ближняя стопка)},$$
$$D_2 = 3{,}815 + 0{,}835 = 4{,}65 \text{ м} \quad \text{(средняя)},$$
$$D_1 = 6{,}315 + 0{,}835 = 7{,}15 \text{ м} \quad \text{(дальняя)}.$$

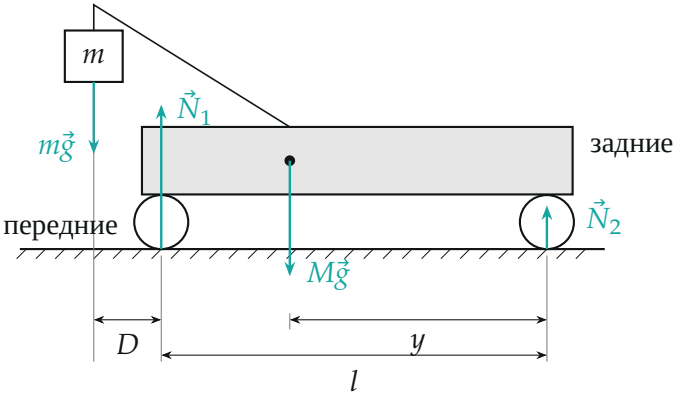


Рис. 2. Силы, действующие на погрузчик с поднятым контейнером (контейнер с тросом считаем частью системы). Плечи — от осей колёс; длины стрелок — по модулю при $m = 45$ т, $D = 2{,}8$ м, $y = 2$ м

Пункт 1. 1. Равновесие без контейнера. Правило моментов относительно оси задних колёс (через неё проходит $\vec{N}_2$, и эта неизвестная сила выпадает): сила N_1 на плече l уравновешивает вес Mg на плече y:

$$N_1^{(0)}\, l = Mg\, y.$$

2. Равновесие с контейнером. То же правило моментов; вес контейнера mg теперь на плече $l + D$ от оси задних колёс:

$$N_1\, l = Mg\, y + mg\, (l + D).$$

3. Изменение силы давления передних колёс. Вычтем первое уравнение из второго — неизвестное y пропадёт:

$$\Delta N_1 = N_1 - N_1^{(0)} = mg\, \frac{l + D}{l}.$$

Сила давления передних колёс *увеличивается*. Для ближайшей стопки $D = D_3 = 2{,}80$ м, а наибольшая масса контейнера в ней $m = 45$ т:

$$\Delta N_{1\,\max} = 45 \cdot 10^3 \cdot 10 \cdot \frac{6 + 2{,}8}{6}\ \text{Н} = 6{,}6 \cdot 10^5\ \text{Н} = 660\ \text{кН}.$$

Пункт 2. 4. Ограничения без контейнера. Из шага 1 $N_1^{(0)} = Mg\,\dfrac{y}{l}$, а правило моментов относительно оси передних колёс даёт $N_2^{(0)} = Mg\,\dfrac{l-y}{l}$. Обе силы не меньше $Mg/6$:

$$\frac{y}{l} \geq \frac{1}{6} \;\Rightarrow\; y \geq 1\text{ м}; \qquad \frac{l-y}{l} \geq \frac{1}{6} \;\Rightarrow\; y \leq 5\text{ м}.$$

5. Ограничение с контейнером. Контейнер нагружает передние колёса (шаг 3), значит, для них опасного нет — опасность в том, что разгрузятся задние. Правило моментов относительно оси передних колёс (выпадает N_1): вес Mg на плече $l-y$ по одну сторону, вес mg на плече D по другую, N_2 на плече l:

$$N_2\,l + mg\,D = Mg\,(l-y) \quad\Rightarrow\quad N_2 = \frac{Mg\,(l-y) - mg\,D}{l}.$$

Условие $N_2 \geq Mg/6 = Mg\,\dfrac{1\text{ м}}{l}$ даёт

$$Mg\,(l-y) - mg\,D \geq Mg\cdot 1\text{ м} \quad\Rightarrow\quad y \leq 5\text{ м} - \frac{mD}{M}.$$

Чем больше произведение mD (момент веса контейнера относительно передней оси, рис. 3), тем жёстче ограничение. Для каждой стопки берём самый тяжёлый контейнер:

стопка	m, т	D, м	mD, т · м
ближняя	45	2,80	126
средняя	31	4,65	144
дальняя	15	7,15	107

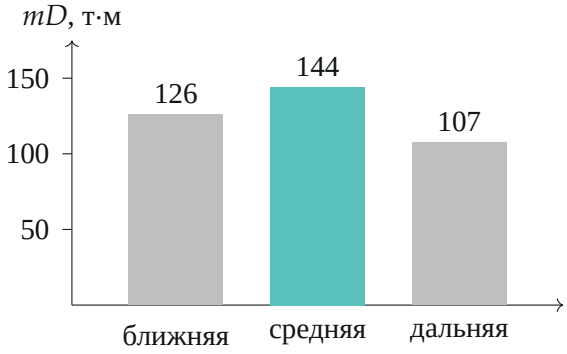


Рис. 3. Наибольший момент веса контейнера относительно оси передних колёс в каждой стопке: опаснее всего средняя стопка, хотя самый тяжёлый контейнер — в ближней

Самое жёсткое ограничение даёт средняя стопка:

$$y \le 5\text{ м} - \frac{31 \cdot 4{,}65}{72}\text{ м} = 5\text{ м} - 2{,}00\text{ м} = 3{,}0\text{ м}.$$

6. Собираем ограничения (рис. 4): $y \ge 1$ м (без груза не должны разгрузиться передние колёса), $y \le 5$ м (без груза — задние), $y \le 3$ м (задние при подъёме из средней стопки). Остаётся $1\text{ м} \le y \le 3$ м.

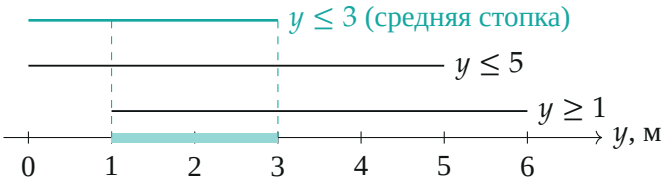


Рис. 4. Допустимые положения центра тяжести: пересечение трёх условий — отрезок от 1 до 3 м (выделен)

Обратите внимание. Самый тяжёлый контейнер ещё не самый опасный: опрокидывает момент mD, а не масса. Контейнер 31 т из средней стопки висит почти вдвое дальше от колёс, чем 45 т из ближней, и даёт больший момент.

Проверка. Пункт 1 вторым способом, через сумму сил: $N_1 + N_2 = (M+m)g$ и $\Delta N_2 = -mg\,D/l = -210$ кН, тогда $\Delta N_1 = mg - \Delta N_2 = 450+$

$210 = 660$ кН — совпало. Граница пункта 2: при $y = 3$ м и контейнере 31 т из средней стопки $N_2 = \dfrac{72 \cdot 3 - 31 \cdot 4{,}65}{6} \cdot 10$ кН $= 120$ кН $= \dfrac{Mg}{6}$ — ровно предел.

Смысл: центр тяжести погрузчика сдвинут к задним колёсам — задние колёса (с противовесом) держат всю систему от опрокидывания вперёд.

Ответ. 1) $\Delta N_{1\,\max} = mg\,\dfrac{l + D}{l} \approx 660$ кН (сила давления передних колёс увеличивается); 2) $1\text{ м} \le y \le 3\text{ м}$.