Студент, дельфин, модель

Задача 3. [МОШ 2019/20, 8 класс, задача 3] Студент-биофизик исследует физические основы плавания дельфинов. Он рассматривает следующую простую модель.

Объём дельфина складывается из объёма тканей тела $V_т$, несжимаемых при погружении, и объёма различных газовых полостей $V_г$ (например, лёгких), который при погружении уменьшается под действием давления воды. Студент считает, что согласно газовым законам, произведение давления $P(h)$ на глубине h на объём $V_г(h)$ должно оставаться постоянным на всех глубинах:

$$P(h)V_г(h) = \text{const}.$$

Пусть дельфин движется вертикально вниз с характерной для себя скоростью v. Расчёты студента показывают, что по достижении нижней критической глубины $h_н = 30$ м дельфин может продолжать движение вниз, не совершая никаких усилий. Иначе говоря, не создавая силы тяги. При движении вертикально вверх с той же скоростью v, достигнув верхней критической глубины $h_в = 10$ м, дельфин продолжит всплывать, не создавая силы тяги. Атмосферное давление равно $P_0 = 10^5$ Па, плотность воды и ускорение свободного падения равны: $\rho = 1000$ кг/м^3 и $g = 10$ Н/кг. Плотность тканей тела отличается от плотности воды на 2 %. Зависимость силы сопротивления воды от скорости неизвестна.

1. Определите отношение объёма тканей тела к объёму полостей при нулевой глубине $\dfrac{V_т}{V_г(0)}$. Можно считать, что при нулевой глубине газовые полости заполнены воздухом при атмосферном давлении P_0.
2. Экспериментально наблюдаются значения критических глубин: $h_н \approx 67$ м и $h_в \approx 6$ м. Чем может быть обусловлено расхождение предсказаний модели студента и экспериментальных данных?

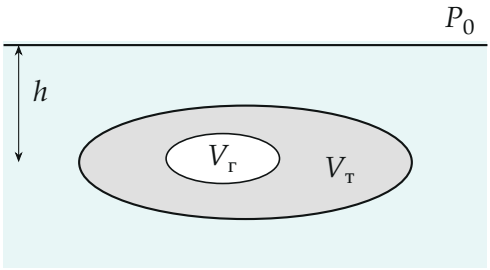

Рис. 1. Поясняющий рисунок: модель студента — несжимаемые ткани $V_т$ и газовая полость $V_г$, сжимающаяся с глубиной

▲ **Решение. Что происходит.** На дельфина действуют сила тяжести, сила Архимеда и сила сопротивления воды, направленная против скорости. Сила Архимеда пропорциональна всему объёму тела, а объём полостей с глубиной уменьшается — значит, чем глубже, тем слабее выталкивание. Ниже некоторой глубины дельфин тонет сам, выше некоторой — всплывает сам. На критических глубинах при движении с постоянной скоростью v сумма сил равна нулю без силы тяги. Неизвестную силу сопротивления F (одинаковую, ведь скорость одинакова) исключим, сложив два уравнения.

Обозначения: m — масса дельфина (масса газа в полостях ничтожна, $m = \rho_т V_т$), $\rho_т$ — плотность тканей, F — модуль силы сопротивления при скорости v, $F_A(h) = \rho g(V_т + V_г(h))$ — сила Архимеда на глубине h, $V_0 = V_г(0)$. Ось y направим вертикально вверх.

Пункт 1. 1. Ткани плотнее воды. Дельфин может сам тонуть на большой глубине, где полости сжаты почти до нуля, только если ткани тяжелее воды. Поэтому $\rho_т = 1{,}02\,\rho$ (а не $0{,}98\,\rho$; ниже это подтвердится и знаком ответа).

2. Нижняя критическая глубина, движение вниз. Скорость направлена вниз и постоянна, поэтому сила сопротивления направлена вверх, а сумма сил равна нулю (рис. 2, слева). Второй закон Ньютона для дельфина в проекции на ось y:

$$F_A(h_н) + F - mg = 0.$$

3. Верхняя критическая глубина, движение вверх. Теперь скорость

вверх, сопротивление — вниз (рис. 2, справа):

$$F_A(h_в) - F - mg = 0.$$

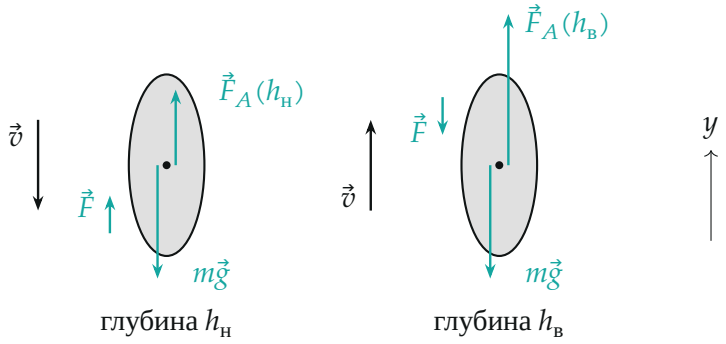

Рис. 2. Силы на критических глубинах: слева дельфин идёт вниз, справа — вверх. Сила сопротивления $\vec{F}$ одна и та же по модулю и всегда против скорости; стрелка $\vec{F}$ сдвинута влево, чтобы не сливаться с другими; для наглядности F взята равной трети веса, длины стрелок пропорциональны силам

4. Исключаем силу сопротивления. Сложим уравнения шагов 2 и 3 — F сократится, и неизвестная зависимость сопротивления от скорости не понадобится:

$$F_A(h_н)+F_A(h_в) = 2mg \quad \Rightarrow \quad \rho g(2V_т+V_г(h_н)+V_г(h_в)) = 2{\cdot}1{,}02\,\rho g V_т.$$

Отсюда

$$V_г(h_н) + V_г(h_в) = 0{,}04\,V_т.$$

Правая часть положительна — значит, ткани действительно плотнее воды: при $0{,}98\rho$ получилось бы отрицательное число.

5. Объём полостей на глубине. Давление на глубине h по закону гидростатики $P(h) = P_0 + \rho g h$. По условию $P(h)V_г(h) = P_0 V_0$, поэтому

$$V_г(h) = V_0\,\frac{P_0}{P_0 + \rho g h}.$$

Каждые 10 м воды добавляют $\rho g \cdot 10\text{ м} = 10^5\text{ Па} = P_0$:

$$V_г(h_в) = V_0\,\frac{P_0}{2P_0} = \frac{V_0}{2}, \qquad V_г(h_н) = V_0\,\frac{P_0}{4P_0} = \frac{V_0}{4}.$$

6. Ответ на пункт 1. Подставим в шаг 4:

$$\frac{V_0}{4} + \frac{V_0}{2} = 0{,}04\,V_т \quad\Rightarrow\quad \frac{V_т}{V_0} = \frac{0{,}75}{0{,}04} = 18{,}75.$$

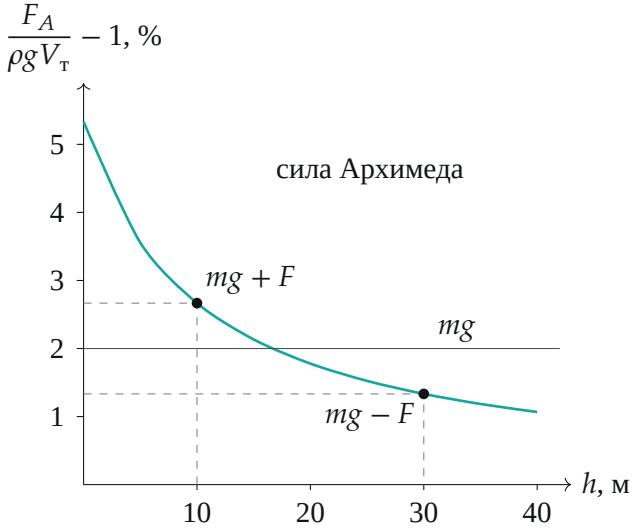

Рис. 3. Сила Архимеда в модели студента при $V_m/V_0 = 18{,}75$ (в процентах сверх $\rho g V_m$). Вес — 2 %; на глубине 10 м выталкивание превышает вес ровно на F, на 30 м — меньше веса на F

Пункт 2. 7. Почему опыт не совпадает с моделью. В модели две критические глубины определяются двумя величинами: отношением $V_т/V_0$ и силой сопротивления F. Разница сил Архимеда на двух глубинах равна $2F$ (шаги 2 и 3). Для наблюдаемых глубин по формуле шага 5: $V_г(6\text{ м}) = V_0/1{,}6 = 0{,}63V_0$, $V_г(67\text{ м}) = V_0/7{,}7 = 0{,}13V_0$ — разница $0{,}50V_0$, а в расчёте студента $0{,}5V_0 - 0{,}25V_0 = 0{,}25V_0$. Значит, с той же скоростью v модель должна была бы приписать дельфину вдвое

большее сопротивление — противоречие: модель неточно описывает либо полости, либо сопротивление. Причины (рис. 4):

- газовые полости — не герметичный пакет: лёгкие дельфина при погружении спадаются, воздух уходит в жёсткие дыхательные пути, газ растворяется в крови, поэтому $PV_г \neq \text{const}$ и объём падает с глубиной иначе;
- сила сопротивления зависит не только от скорости, но и от глубины (у поверхности добавляется волновое сопротивление), так что F в шагах 2 и 3 разная и не сокращается.

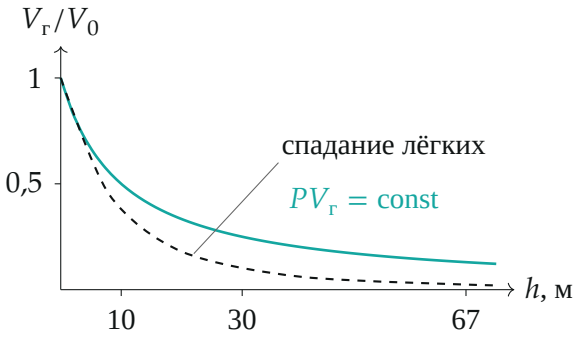

Рис. 4. Объём полостей в модели студента (сплошная) и качественно — у настоящего дельфина, у которого лёгкие спадаются (пунктир)

Обратите внимание. Сила сопротивления неизвестна, но её и не нужно знать: на двух критических глубинах скорость одинакова, значит, и сила одинакова по модулю, но направлена в разные стороны. Сложение уравнений её убирает.

Проверка. Размерность: в ответе отношение объёмов — число. Числа: при $V_0 = 1$, $V_т = 18{,}75$ сила Архимеда на 10 м пропорциональна $18{,}75 + 0{,}5 = 19{,}25$, на 30 м — $18{,}75 + 0{,}25 = 19{,}0$, вес — $1{,}02 \cdot 18{,}75 = 19{,}125$; разности $19{,}25 - 19{,}125 = 0{,}125$ и $19{,}125 - 19{,}0 = 0{,}125$ равны — это одна и та же F, как и должно быть.

Смысл: газа в дельфине по объёму около 5 % от тела, и этого хватает, чтобы у поверхности он всплывал сам, а на глубине тонул сам.

Ответ. 1) $\dfrac{V_\text{т}}{V_\text{г}(0)} = \dfrac{\frac{1}{4} + \frac{1}{2}}{0{,}04} = 18{,}75$; 2) модель описывает полости как герметичный пакет с газом ($PV_\text{г} = \text{const}$), а у дельфина лёгкие спадаются и газ перераспределяется; кроме того, сила сопротивления может зависеть не только от скорости, но и от глубины.