Аквариум

Задача 4. [МОШ 2019/20, 8 класс, задача 4] Аквариум в виде куба с длиной стороны $a = 40$ см заполнен водой доверху. Аквариум начинают очень медленно поворачивать вокруг одного из рёбер, так что угол φ между дном аквариума и горизонтальной поверхностью увеличивается на 1° каждые 10 секунд, при этом вода из аквариума вытекает. Скорость истечения воды количественно характеризует расход $Q = \dfrac{\Delta m}{\Delta t}$, равный массе воды, вытекающей из аквариума за малое время Δt. Расход Q меняется в зависимости от угла φ. Плотность воды равна $\rho = 1000$ кг/м^3.

1. Найдите (можно приближённо) массу воды, вытекающей из аквариума в первые 10 секунд.
2. Чему равен угол φ в момент, когда расход воды Q достигает максимального значения $Q_{\max}$?
3. Определите (можно приближённо) максимальное значение расхода $Q_{\max}$.

Примечание. При решении задачи могут оказаться полезными следующие геометрические соотношения.

1) Теорема Пифагора. В прямоугольном треугольнике с катетами a, b и гипотенузой c сумма квадратов катетов равна квадрату гипотенузы: $a^2 + b^2 = c^2$.

2) Площадь прямоугольного треугольника с гипотенузой 1 и малым острым углом α приближённо равна $S \approx \dfrac{\pi\alpha}{360^\circ}$ (α измеряется в градусах). Малыми вполне можно считать углы меньше 10°.

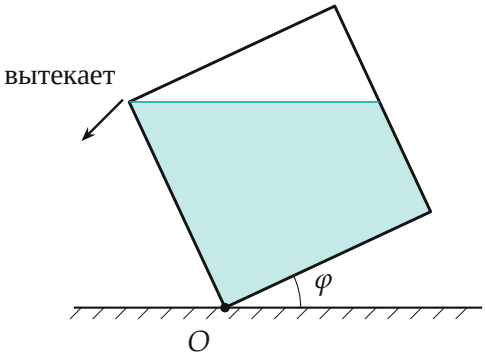

Рис. 1. Поясняющий рисунок: сечение аквариума плоскостью, перпендикулярной оси поворота O; вода переливается через край над осью

▲ **Решение. Что происходит.** Аквариум поворачивают очень медленно, поэтому вода в каждый момент успевает успокоиться: её поверхность горизонтальна и проходит через самый низкий край — верхнее ребро над осью поворота (рис. 1). Всё, что выше этого уровня, вытекает. Значит, задача чисто геометрическая: сколько воды остаётся при угле φ и как быстро это количество меняется. Главная идея — за малый поворот $\Delta\varphi$ поверхность воды поворачивается относительно аквариума на тот же угол вокруг края, и выливается тонкий клин.

Обозначения. Аквариум удобно рассматривать в его собственной системе отсчёта, в сечении — квадрат $OBCD$ со стороной a (O — ось поворота, D — край, через который вода выливается). Угловая скорость поворота $\omega = 1^\circ$ за 10 с, $\Delta\varphi$ — малый поворот за время Δt, E — точка, где поверхность воды встречает стенку или дно, $L = DE$.

1. Где поверхность воды при угле φ. В системе аквариума поверхность — прямая через D, наклонённая к дну под углом φ. Пока $\varphi < 45^\circ$, она упирается в дальнюю стенку BC (рис. 2, слева), и вылилась вода из прямоугольного треугольника DCE с катетами $DC = a$ и $CE = a\,\mathrm{tg}\,\varphi$. При $\varphi > 45^\circ$ поверхность упирается в дно OB (рис. 2, справа), и осталась только вода в треугольнике DOE с катетами a и $a\,\mathrm{ctg}\,\varphi$.

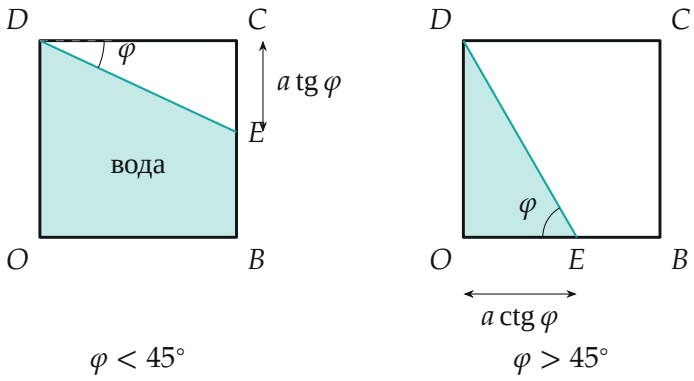

Рис. 2. Сечение аквариума в его собственной системе: поверхность воды проходит через край D под углом φ к дну. Слева $\varphi = 25^\circ$, справа $\varphi = 60^\circ$; вода

выделена

2. Объём вылившейся воды. Умножим площадь треугольника на длину ребра a:

$$V(\varphi) = \begin{cases} \dfrac{a^3 \operatorname{tg}\varphi}{2}, & \varphi \le 45^\circ, \\ a^3\left(1 - \dfrac{\operatorname{ctg}\varphi}{2}\right), & \varphi \ge 45^\circ. \end{cases}$$

При $\varphi = 45^\circ$ обе формулы дают $a^3/2$ — ровно половина, поверхность идёт по диагонали DB.

Пункт 1. 3. Первые 10 секунд. За 10 с аквариум поворачивается на 1°. Вылился треугольник с катетами a и $a\operatorname{tg}1^\circ$; угол мал, поэтому его гипотенуза почти равна a, и по примечанию (площадь треугольника с гипотенузой 1 и углом α равна $\pi\alpha/360^\circ$) площадь равна $a^2\dfrac{\pi\cdot 1^\circ}{360^\circ}$. Масса

$$m_0 = \rho a^3 \frac{\pi}{360} = 1000 \cdot 0{,}064 \cdot \frac{\pi}{360}\ \text{кг} = 0{,}56\ \text{кг} = 560\ \text{г}.$$

Точная формула шага 2 даёт $\rho a^3 \operatorname{tg}1^\circ/2 = 559$ г — то же.

Пункт 2. 4. Сколько выливается за малый поворот. Повернём аквариум ещё на малый угол $\Delta\varphi$. В системе аквариума поверхность воды поворачивается вокруг края D на $\Delta\varphi$, и выливается узкий клин — треугольник с вершиной D, длинной стороной $L = DE$ и малым углом $\Delta\varphi$ (рис. 3). Его площадь, как у треугольника из примечания, увеличенного в L раз:

$$\Delta S = \frac{L^2\,\Delta\varphi}{2} \quad (\Delta\varphi \text{ в радианах}), \qquad \Delta V = a\,\Delta S = \frac{a\,L^2}{2}\,\Delta\varphi.$$

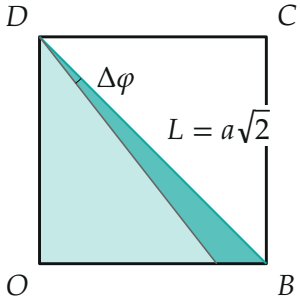

Рис. 3. При $\varphi = 45°$ поверхность идёт по диагонали DB; за малый поворот выливается узкий клин (тёмный) длиной $L = a\sqrt{2}$ (угол $\Delta\varphi$ увеличен)

5. Когда клин самый большой. При $\varphi < 45°$ точка E на стенке BC, $L = a/\cos\varphi$ и растёт с углом; при $\varphi > 45°$ точка E на дне, $L = a/\sin\varphi$ и убывает. Самая длинная хорда квадрата из вершины D — диагональ DB, $L_{\max} = a\sqrt{2}$, она получается при $\varphi = 45°$. Расход $Q = \rho\Delta V/\Delta t$ пропорционален L^2, значит, наибольший расход — при

$$\varphi = 45°.$$

Тот же вывод из формулы шага 2: на каждый градус поворота при $\varphi < 45°$ выливается $\dfrac{a^3}{2\cos^2\varphi}$, при $\varphi > 45°$ — $\dfrac{a^3}{2\sin^2\varphi}$; первое растёт, второе убывает (рис. 4).

Пункт 3. 6. Наибольший расход. Подставим $L = a\sqrt{2}$, $\Delta\varphi = \omega\Delta t$, $\omega = \dfrac{\pi}{180 \cdot 10\text{ с}} = 1{,}745 \cdot 10^{-3}$ рад/с:

$$Q_{\max} = \rho\,\frac{a\,(a\sqrt{2})^2}{2}\,\omega = \rho\,a^3\,\omega$$
$$= 1000 \cdot 0{,}064 \cdot 1{,}745 \cdot 10^{-3}\ \frac{\text{кг}}{\text{с}} \approx 0{,}112\ \frac{\text{кг}}{\text{с}} = 112\ \frac{\text{г}}{\text{с}}.$$

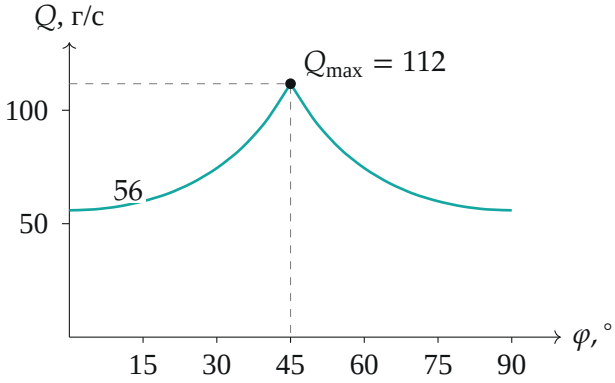

Рис. 4. Расход воды в зависимости от угла (по точкам $Q = \rho a^3\omega/(2\cos^2\varphi)$ и $\rho a^3\omega/(2\sin^2\varphi)$): острый максимум при 45°

Обратите внимание. Расход определяется не тем, сколько воды осталось, а длиной поверхности воды L: клин тем толще, чем длиннее его сторона. Поэтому максимум — в момент, когда поверхность становится диагональю, а не в начале и не в конце.

Проверка. Размерность: $\rho a^3\omega$ — кг/с. Второй способ для пункта 3: возле 45° за 1° (10 с, от 44,5° до 45,5°) выливается $\rho\dfrac{a^3}{2}(\operatorname{tg}45{,}5^\circ - \operatorname{tg}44{,}5^\circ) = 32$ кг $\cdot\, 0{,}0349 = 1{,}117$ кг, то есть 112 г/с — совпало. Предел: при $\varphi \to 0$ расход вдвое меньше максимального, $\rho a^3\omega/2 = 56$ г/с, что согласуется с пунктом 1 (560 г за 10 с).

Смысл: аквариум отдаёт воду неравномерно — сначала и в конце медленно, быстрее всего в момент, когда вода стоит по диагонали.

Ответ. 1) $m_0 = \rho a^3\dfrac{\pi}{360} \approx 560$ г; 2) $\varphi = 45^\circ$; 3) $Q_{\max} = \rho a^3\omega \approx 112$ г/с, где $\omega = 1^\circ$ за 10 с.