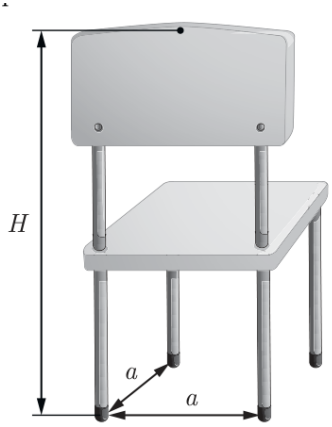
Стул начинает опрокидываться

Задача 1. [МОШ 2019/20, 9 класс, задача 1] К гладкому горизонтальному полу прибита тонкая (высотой примерно 1 см) планка. Вася приставил к планке стул передними ножками, привязал к верхней точке спинки стула верёвку и с помощью динамометра выяснил, что стул начинает опрокидываться, когда к верёвке перпендикулярно планке прикладывается горизонтальная сила $F_1 = 16$ Н. Затем он изменил положение стула, и теперь стул касается планки своими задними ножками. В этом случае минимальное значение силы, приложенной перпендикулярно планке в горизонтальном направлении, необходимой для опрокидывания стула, оказалось равно $F_2 = 12$ Н. Расстояние между ножками стула (см. рисунок) равно $a = 42$ см. Высота верхней точки спинки стула над полом равна $H = 72$ см. Можно считать, что эта точка находится ровно над линией задних ножек. Какую минимальную силу F_3 нужно приложить к верёвке, чтобы опрокинуть стул, если к планке стул приставлен правыми ножками? Считайте, что ускорение свободного падения равно $g = 10$ м/с^2. Правая и левая половинки стула симметричны.



▲ **Решение.** **Что происходит.** Стул начинает опрокидываться, когда ножки с одной стороны перестают давить на пол: он поворачивается вокруг ребра, которым упирается в планку. В этот момент сила реакции

пола у отрывающихся ножек равна нулю, и правило моментов относительно ребра опрокидывания связывает только две силы: тяжесть и силу верёвки. Первые два опыта — два уравнения для двух неизвестных: веса стула и положения его центра масс. В третьем опыте сила может быть направлена как угодно, и минимальной она будет при наибольшем плече. Класс задачи — равновесие твёрдого тела на грани опрокидывания (правило моментов).

Обозначения. m — масса стула, C — его центр масс, x — расстояние по горизонтали от линии передних ножек до C (вдоль направления «вперёд–назад»). Высота центра масс в уравнения не войдёт: тяжесть вертикальна, и её плечо — горизонтальное расстояние.

1. Первый опыт: опора — передние ножки. В момент начала опрокидывания задние ножки не давят на пол. Силы реакции пола и планки приложены у передних ножек — на оси вращения, их момент равен нулю; поэтому ось и берём через передние ножки (рис. 1). Сила F_1 горизонтальна и приложена на высоте H, её плечо H; тяжесть приложена в C, её плечо x. Правило моментов относительно оси через передние ножки:

$$F_1 H = mgx.$$

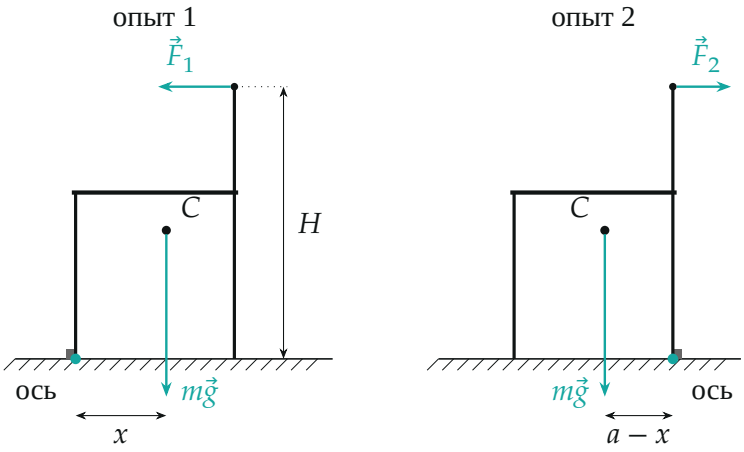


Рис. 1. Вид сбоку (перед стула слева). Слева — опыт 1: ось через передние ножки у планки; справа — опыт 2: ось через задние ножки. Стрелки сил в

масштабе

2. Второй опыт: опора — задние ножки. Теперь у планки задние ножки, сила тянет назад, оторваться должны передние. Ось — через задние ножки, плечо силы снова H (точка спинки над задними ножками, сила горизонтальна), плечо тяжести $a - x$:

$$F_2 H = mg\,(a - x).$$

3. Масса и центр масс. Складываем уравнения, x уходит:

$$(F_1 + F_2)H = mga \quad \Rightarrow \quad mg = \frac{(F_1 + F_2)H}{a} = \frac{28 \cdot 0{,}72}{0{,}42}\ \text{Н} = 48\ \text{Н},$$

$$m = 4{,}8\ \text{кг}.$$

Отсюда $x = F_1 H/(mg) = 16 \cdot 0{,}72/48\ \text{м} = 0{,}24\ \text{м}$. Для третьего опыта x не понадобится: там важно положение C по отношению к правым и левым ножкам, а по симметрии стула C — ровно посередине между ними (рис. 2).

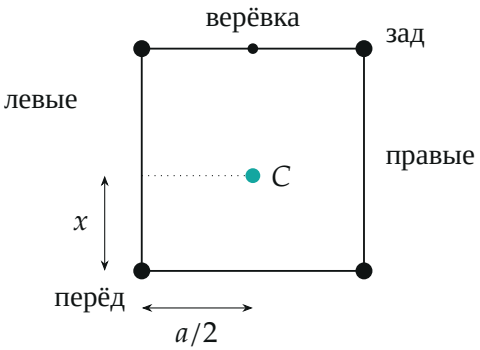


Рис. 2. Вид сверху на ножки: центр масс на $x = 24$ см от передних ножек и посередине между левыми и правыми; верёвка привязана над серединой задней пары

4. Третий опыт: ось — линия правых ножек. Стул опрокидывается вокруг ребра через две правые ножки (ось O на рис. 3, вид спереди вдоль оси). Тяжесть даёт момент $mg \cdot a/2$. Точка крепления верёвки P находится над серединой задней пары ножек: по горизонтали на $a/2$ от оси, на

высоте H. Сила теперь может быть направлена как угодно. Момент силы относительно оси равен $F \cdot l$, где l — плечо, не больше расстояния OP; максимальное плечо $l_{\max} = OP$ получается, когда сила перпендикулярна отрезку OP. Значит, минимальная сила

$$F_3\, OP = mg\,\frac{a}{2}, \qquad OP = \sqrt{H^2 + \frac{a^2}{4}} = \sqrt{0{,}72^2 + 0{,}21^2}\ \text{м} = 0{,}75\ \text{м},$$

$$F_3 = \frac{mga}{2\,OP} = \frac{48 \cdot 0{,}21}{0{,}75}\ \text{Н} \approx 13{,}4\ \text{Н}.$$

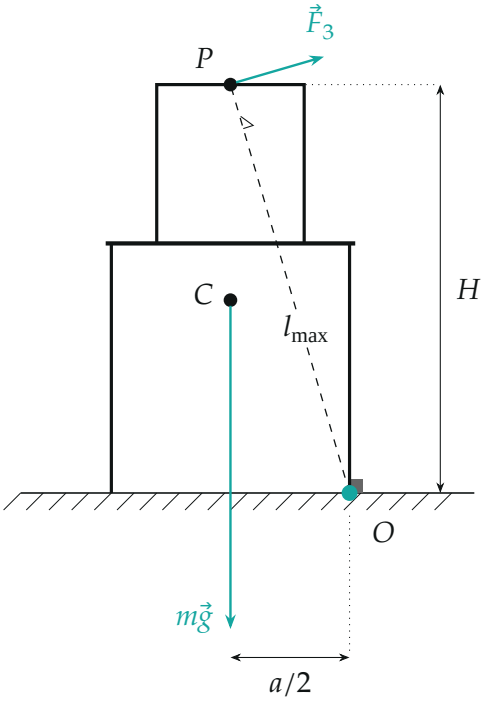


Рис. 3. Опыт 3, вид спереди вдоль оси O (правые ножки у планки). Сила перпендикулярна OP — плечо наибольшее; стрелки в масштабе

5. Сила действительно может быть такой. Направление F_3 — вправо и вверх, под углом к горизонтали, тангенс которого $\frac{a/2}{H} = 0{,}29$. Горизонтальная составляющая прижимает правые ножки к планке, и планка

её уравновешивает — пол гладкий, иначе стул бы просто поехал. Вертикальная составляющая $F_3 \cdot 0{,}21/0{,}75 \approx 3{,}8$ Н меньше веса 48 Н — стул не взлетает, а поворачивается. Для сравнения: горизонтальная сила (плечо H) должна быть $mga/(2H) = 14$ Н — больше.

Обратите внимание. В первых двух опытах направление силы задано — горизонтально; в третьем оно не задано, и выгоднее тянуть под углом. Наибольшее плечо — это расстояние от оси до точки приложения силы, а не высота H.

Проверка. Размерность: $mg\,a/OP$ — ньютоны. Второй способ для массы: $x = 0{,}24$ м и $a - x = 0{,}18$ м, отношение $x/(a-x) = 4/3 = F_1/F_2$ — как и должно быть по правилу моментов при одинаковом плече H. Предел: если бы верёвка была привязана прямо над осью, $OP = H$, но плечо тяжести осталось бы $a/2$ — сила стала бы горизонтальной и равной $mga/(2H)$.

Смысл: два опыта с известным направлением силы «взвешивают» стул и находят его центр масс, а в третьем выгода в 0,6 Н получается только от выбора направления силы.

Ответ. $F_3 = \dfrac{(F_1+F_2)H}{2\sqrt{H^2+a^2/4}} \approx 13{,}4$ Н (масса стула 4,8 кг; сила перпендикулярна отрезку от линии правых ножек до точки крепления верёвки).