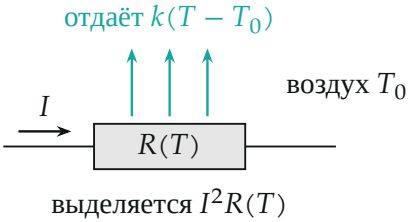
Резистор начинает плавиться

Задача 2. [МОШ 2019/20, 9 класс, задача 2] При увеличении тока через проволочный резистор он нагревается, при этом его температура в зависимости от протекающего тока изменяется нелинейно. При малых токах, составляющих для типичных резисторов величину порядка 10 мА, температура резистора T практически неотличима от температуры окружающей среды T_0. При увеличении тока до некоторого предельного значения $I_{\max}$ резистор очень быстро (почти мгновенно) нагревается до очень высокой температуры и плавится (сгорает).

Пусть сопротивление некоторого резистора при комнатной температуре и токе 1 мА равно 10 Ом. Известно, что значение предельного тока для этого резистора равно $I_{\max} = 1{,}35$ А. Найдите сопротивление резистора и напряжение на нём при токе, равном $0{,}8I_{\max}$.

Можно считать, что зависимость сопротивления резистора от температуры линейная: $R(T) = R_0\,(1 + \alpha(T - T_0))$, R_0 — сопротивление резистора при температуре T_0, α — неизвестный коэффициент. Мощность теплоотдачи пропорциональна разности температур резистора и окружающей среды.



Поясняющий рисунок: ток выделяет в резисторе теплоту, резистор отдаёт её окружающему воздуху

▲ **Решение. Что происходит.** Ток греет резистор, нагретый резистор отдаёт тепло воздуху. При постоянном токе устанавливается температура, при которой выделяемая мощность равна отдаваемой. Но выделяемая мощность сама растёт с температурой: сопротивление увеличивается. Пока ток мал, рост теплоотдачи с температурой обгоняет рост нагрева

и равновесие есть. При предельном токе нагрев растёт с температурой так же быстро, как теплоотдача, равновесия нет — температура уходит вверх без ограничения, резистор сгорает. Класс задачи — тепловой баланс в стационарном режиме и условие существования решения (тепловой пробой).

Обозначения. $\theta = T - T_0$ — перегрев, k — коэффициент теплоотдачи (мощность $k\theta$). При токе 1 мА перегрев ничтожен, поэтому $R_0 = 10$ Ом.

1. Уравнение теплового баланса. В установившемся режиме температура постоянна, по закону сохранения энергии выделяемая по закону Джоуля–Ленца мощность равна отдаваемой:

$$I^2 R_0 \,(1 + \alpha\theta) = k\theta.$$

2. Перегрев и сопротивление. Собираем θ в одну сторону:

$$\theta = \frac{I^2 R_0}{k - \alpha I^2 R_0}.$$

Перегрев положителен и конечен, только пока $\alpha I^2 R_0 < k$. Сопротивление:

$$R = R_0(1 + \alpha\theta) = R_0 \frac{k}{k - \alpha I^2 R_0}.$$

3. Предельный ток — графически. Изобразим обе мощности как функции перегрева (рис. 1). Отдаваемая $k\theta$ — прямая через начало координат с наклоном k. Выделяемая $I^2 R_0(1+\alpha\theta)$ — прямая, начинающаяся с $I^2 R_0$ при $\theta = 0$, с наклоном $\alpha I^2 R_0$. Пока наклон выделяемой меньше k, прямые пересекаются — это рабочая температура. С ростом тока точка пересечения уходит вправо; когда наклоны сравниваются, прямые параллельны, пересечения нет, и выделение всегда больше отдачи — резистор греется без предела. Значит,

$$\alpha I_{\max}^2 R_0 = k, \qquad I_{\max}^2 = \frac{k}{\alpha R_0}.$$

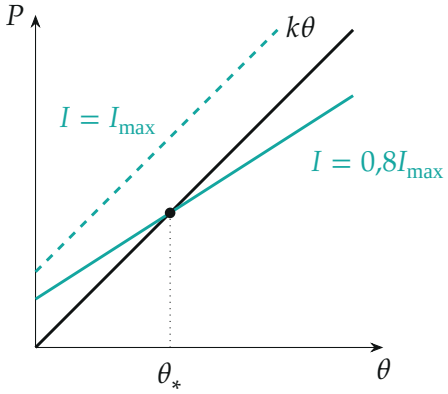


Рис. 1. Отдаваемая мощность (чёрная прямая) и выделяемая (бирюзовые) в зависимости от перегрева. При $I < I_{\max}$ есть пересечение — рабочая точка; при $I = I_{\max}$ прямые параллельны

4. Сопротивление при $0{,}8I_{\max}$**.** Подставим $k = \alpha I_{\max}^2 R_0$ в формулу шага 2, α и k сокращаются:

$$R = \frac{R_0}{1 - I^2/I_{\max}^2} = \frac{10}{1 - 0{,}64}\ \text{Ом} \approx 27{,}8\ \text{Ом}.$$

Сопротивление выросло почти втрое: резистор уже сильно нагрет, хотя ток ещё на 20 % ниже предельного (рис. 2).

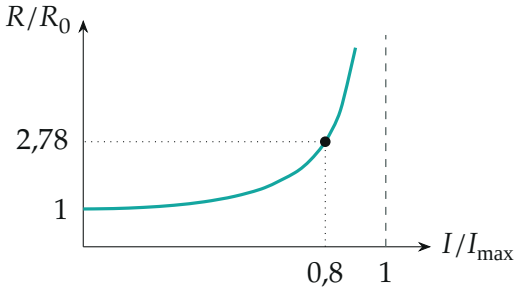


Рис. 2. Сопротивление растёт как $1/(1-I^2/I_{\max}^2)$ и уходит в бесконечность при $I \to I_{\max}$

5. Напряжение. По закону Ома

$$U = IR = \frac{0{,}8 I_{\max} R_0}{1 - 0{,}64} = 0{,}8 \cdot 1{,}35 \cdot 27{,}8 \text{ В} \approx 30 \text{ В}.$$

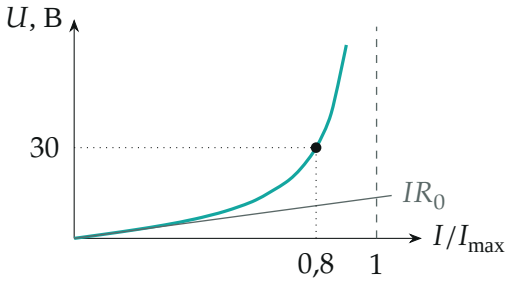


Рис. 3. Вольт-амперная характеристика нагретого резистора; серым — закон Ома для холодного резистора $U = IR_0$

Обратите внимание. Ни α, ни k не даны и не нужны: их комбинацию $k/(\alpha R_0)$ задаёт предельный ток. Сгорание — это не «температура плавления достигнута при данном токе», а исчезновение равновесия.

Проверка. Размерность: $R_0/(1 - I^2/I_{\max}^2)$ — омы. Предел: при $I \ll I_{\max}$ $R \to R_0$, резистор холодный, как и сказано в условии. Второй способ: из рис. 1 при $s = I^2/I_{\max}^2 = 0{,}64$ и $k = 1$, $\alpha = 1$ пересечение $\theta_* = s/(1 - s) = 1{,}78$, и $R/R_0 = 1 + \theta_* = 2{,}78$ — то же.

Смысл: даже при токе, заметно меньшем предельного, резистор работает в сильно нагретом режиме — рост сопротивления с температурой «раскачивает» нагрев.

Ответ. $R = \dfrac{R_0}{1 - (I/I_{\max})^2} \approx 27{,}8$ Ом, $U = IR \approx 30$ В.