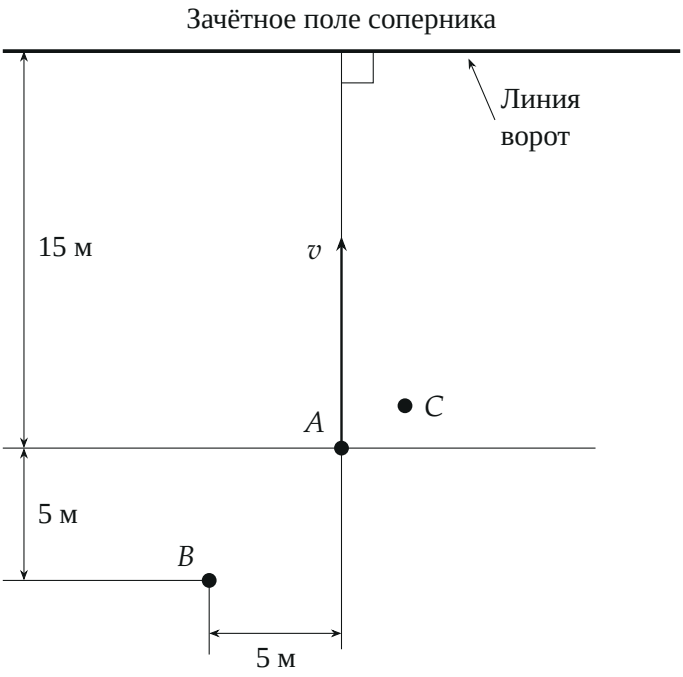
Регби

Задача 3. [МОШ 2019/20, 9 класс, задача 3] Регби — это командная игра с мячом. Цель игры — принести мяч в зачётное поле соперника, расположенное за линией ворот. Игрок с мячом может отдать передачу другому игроку своей команды, причём передачу нельзя делать вперёд (только вбок или назад). Игроки команды соперника имеют право остановить игрока с мячом. На рисунке представлен фрагмент поля с тремя регбистами: A и B — игроки из одной команды, C — игрок команды соперника. Игрок C вот-вот остановит игрока A, поэтому тот делает передачу игроку B. Чтобы сделать точную передачу, игрок A предварительно притормозил, и в момент броска его скорость направлена в сторону линии ворот и равна $v = 2$ м/с.

Пусть скорость игрока B равна 8 м/с при движении по любой траектории. Расположение игроков A, B и C на поле, показанное на рисунке, соответствует моменту броска.



1. С какой минимальной скоростью (относительно себя) должен бросить мяч игрок A, чтобы игрок B принял передачу и добежал до зачётного поля соперника за минимальное время?
2. Пусть игрок A бросил мяч с относительной скоростью 6 м/с. Докажите, что минимальное время $t_{\min}$, за которое игрок B может добежать до зачётного поля соперника, поймав мяч в процессе движения, достигается, если после броска игрока A мяч летит параллельно линии ворот.
3. Найдите время $t_{\min}$. Утверждением из п. 2) можно пользоваться без доказательства.

▲ **Решение. Что происходит.** Мяч летит относительно земли со скоростью, равной сумме скорости игрока A и скорости броска (закон сложения скоростей). Правило «не вперёд» ограничивает именно скорость мяча относительно земли: её составляющая к линии ворот не может быть положительной. Игрок B бежит с постоянной по модулю скоростью, и самый быстрый его путь к зачётному полю — прямо, перпендикулярно линии ворот. Задача — кинематика со сложением скоростей и выбором оптимальной траектории (треугольник перемещений).

Обозначения. Начало координат — в точке A в момент броска, ось y — к линии ворот, ось x — вдоль неё вправо. Тогда $B = (-5; -5)$ м, линия ворот $y = 15$ м. $\vec{v} = (0; 2)$ м/с — скорость A, $\vec{u}$ — скорость мяча относительно A, $\vec{w} = \vec{v} + \vec{u}$ — относительно земли, $w_y \le 0$. $V = 8$ м/с — скорость B.

Пункт 1.

1. Самый быстрый путь B. Расстояние от B до линии ворот 20 м, быстрее всего его пробежать по перпендикуляру — за $20/8 = 2{,}5$ с. Значит, мяч надо поймать где-то на этой прямой $x = -5$ м, не сворачивая.

2. Где поймать. Мяч не летит вперёд, $w_y \le 0$: он всегда не выше линии $y = 0$. Игрок B на своей прямой находится ниже $y = 0$ только первые $5/8$ с. Встреча в момент $t \le 5/8$ с в точке $(-5;\ -5 + 8t)$ требует

$$w_x = -\frac{5}{t}, \qquad w_y = 8 - \frac{5}{t} \le 0.$$

3. Минимальная скорость броска. Скорость относительно A: $\vec{u} = \vec{w} - \vec{v} = (w_x;\, w_y - 2)$. Обозначим $s = 5/t \geq 8$ м/с:

$$u^2 = s^2 + (6 - s)^2 = 2s^2 - 12s + 36.$$

При $s \geq 8$ это выражение растёт (вершина параболы при $s = 3$), минимум — при $s = 8$: $t = 5/8$ с, мяч ловят в точке $(-5; 0)$, он летит параллельно линии ворот со скоростью $w = 8$ м/с относительно земли. Тогда (рис. 1)

$$u_{\min} = \sqrt{8^2 + 2^2} = \sqrt{68}\ \text{м/с} \approx 8{,}2\ \text{м/с}.$$

Бросать надо назад-влево: чтобы погасить скорость A к воротам, бросок имеет составляющую 2 м/с назад.

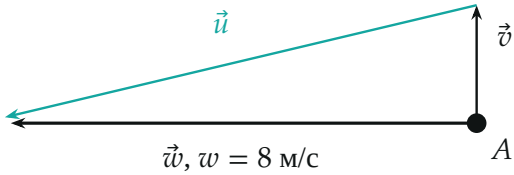


Рис. 1. Пункт 1: $\vec{w} = \vec{v} + \vec{u}$; скорость мяча относительно земли параллельна линии ворот ($v = 2$ м/с, $w = 8$ м/с, масштаб один)

Пункт 2.

4. Сравнение с параллельным броском. Пусть мяч брошен со скоростью $u = 6$ м/с и летит относительно земли вниз под углом к линии $y = 0$. Возможные $\vec{w}$ лежат на окружности радиуса 6 с центром в конце $\vec{v}$, с $w_y \leq 0$; их длина $w^2 = w_x^2 + w_y^2 = 36 - (w_y - 2)^2 + w_y^2 = 32 + 4w_y \leq 32$. Самая длинная — при $w_y = 0$: $w_0 = 4\sqrt{2}$ м/с, это и есть бросок параллельно линии ворот.

Пусть при наклонном броске B ловит мяч в точке $M = (x; y)$, $y < 0$, мяч приходит туда в момент $t_M = AM/w$, а B потом бежит к воротам расстояние не меньше $15 - y = 15 + |y|$. Его время не меньше

$$T = \max\left(t_M,\ \frac{BM}{V}\right) + \frac{15 + |y|}{V}.$$

Возьмём точку $M_0 = (x; 0)$ прямо над M (рис. 2). При параллельном броске мяч приходит в M_0 к моменту $|x|/w_0 \le AM/w = t_M$: путь короче, а скорость больше. Игрок B может бежать в M_0: по неравенству треугольника $BM_0 \le BM + MM_0 = BM + |y|$. Дождавшись мяча, он бежит 15 м. Его время

$$T_0 \le \max\left(t_M, \frac{BM + |y|}{V}\right) + \frac{15}{V} \le \max\left(t_M, \frac{BM}{V}\right) + \frac{|y|}{V} + \frac{15}{V} = T.$$

Значит, любой наклонный бросок не лучше параллельного, а равенство возможно только при $y = 0$. Броски вправо ($w_x > 0$) уводят мяч от B — для них рассуждение то же. Утверждение доказано.

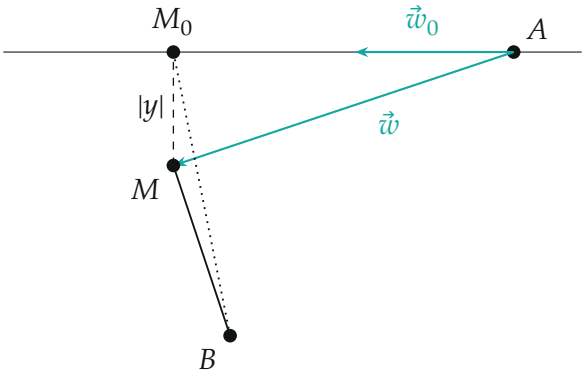


Рис. 2. Пункт 2: при наклонном броске мяч ловят в M; при параллельном B бежит в M_0 над ней — путь $BM_0 \le BM + |y|$, а мяч приходит раньше

Пункт 3.

5. Скорость мяча. Мяч летит параллельно линии ворот: $w_y = 0$, значит $u_y = -2$ м/с, $|u_x| = \sqrt{36 - 4} = 4\sqrt{2}$ м/с, $w = 4\sqrt{2} \approx 5{,}66$ м/с влево (рис. 3).

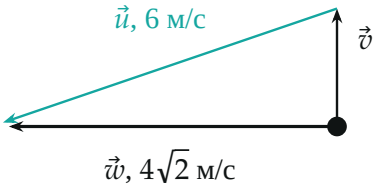


Рис. 3. Пункт 3: бросок с $u = 6$ м/с так, чтобы мяч летел вдоль линии ворот

6. Треугольник перемещений. Игрок B встречает мяч в точке M на прямой $y = 0$ в момент t_1; встретить раньше нельзя, а позже — невыгодно, после встречи бежать всё равно 15 м. Стороны треугольника ABM (рис. 4): $AB = 5\sqrt{2}$ м, $AM = wt_1$, $BM = Vt_1$. Угол при A между AB и линией $y = 0$ равен 45°. Отношение сторон $BM : AM = V : w = 8 : 4\sqrt{2} = \sqrt{2}$. Теорема синусов:

$$\frac{\sin\angle B}{AM} = \frac{\sin 45^\circ}{BM} \Rightarrow \sin\angle B = \frac{\sin 45^\circ}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2},$$

$$\angle B = 30^\circ, \quad \angle M = 180^\circ - 45^\circ - 30^\circ = 105^\circ.$$

Ещё раз теорема синусов:

$$\frac{BM}{\sin 45^\circ} = \frac{AB}{\sin 105^\circ} \Rightarrow t_1 = \frac{AB\sin 45^\circ}{V\sin 105^\circ} = \frac{5}{8\cdot 0{,}966}\ \text{с} \approx 0{,}647\ \text{с}.$$

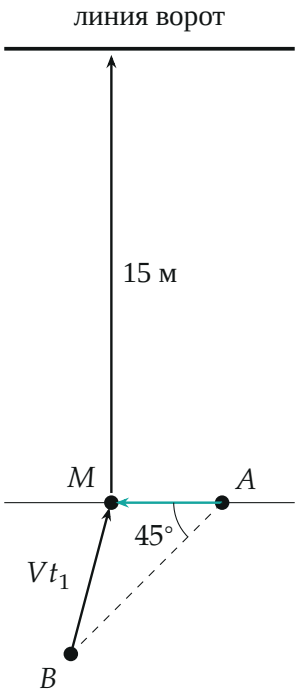


Рис. 4. Пункт 3, в масштабе: мяч летит $A \to M$, игрок $B \to M$ за то же время t_1, затем 15 м к линии ворот

7. Полное время. После приёма B бежит перпендикулярно линии ворот 15 м:

$$t_{\min} = t_1 + \frac{15}{V} \approx 0{,}647 + 1{,}875 \approx 2{,}5 \text{ с}.$$

Обратите внимание. Запрет передачи вперёд относится к скорости мяча относительно земли, а не относительно игрока A. Поэтому бросать приходится немного назад: часть скорости броска уходит на то, чтобы погасить бег самого A.

Проверка. Пункт 3 вторым способом — теоремой косинусов: $(8t)^2 = 50 + 32t^2 - 2\cdot 5\sqrt{2}\cdot 4\sqrt{2}\,t\cos 45°$, то есть $32t^2 + 56{,}6t - 50 = 0$, $t = 0{,}647$ с — совпадает. Численный перебор углов броска (python): при наклоне скорости мяча вниз время только растёт (2,52; 2,55; 2,59 с при $w_y = 0$; -1; -2 м/с), что подтверждает пункт 2. Предел: бросок пункта 1 ($u = 8{,}2$ м/с) даёт 2,5 с — меньше быть не может, и при $u = 6$ м/с время 2,52 с

лишь чуть больше.

Смысл: в регби пас назад-вбок проигрывает лишь доли секунды, если мяч летит строго поперёк поля.

Ответ. 1) $u_{\min} = \sqrt{8^2 + 2^2} \approx 8{,}2$ м/с; 2) доказано: при любом наклоне вниз время не меньше, чем при полёте мяча вдоль линии ворот; 3) $t_{\min} = \dfrac{AB \sin 45^\circ}{V \sin 105^\circ} + \dfrac{15\text{ м}}{V} \approx 2{,}5$ с.