Вова начинает расчёты

Задача 4. [МОШ 2019/20, 9 класс, задача 4] Вова с папой поехали на машине из Москвы в Санкт-Петербург. На трассе скорость их автомобиля была не более 110 км/ч, но не менее 80 км/ч. От скуки Вова решил снять видео на смартфон. В поле съёмки попал джип, двигавшийся некоторое время по соседней полосе с той же скоростью, что и автомобиль Вовиного папы. И тут Вова обнаружил, что на экране его телефона радиальные поперечины на диске колеса джипа (форма диска показана на рисунке ниже) либо стоят на месте, либо медленно вращаются, совершая не более одного оборота за время около 10 с. Позже на стоянке по маркировке на покрышке обогнавшего их джипа, Вова определил диаметр его колеса, получилось 72 см. Вова знает, что его смартфон снимает видео с частотой 30 кадров в секунду. Он считает, что каждый кадр представляет собой мгновенную фотографию.



Вова подумал, что по имеющимся данным он может не просто определить скорость v джипа в тот момент, когда он поравнялся с машиной папы, но и указать границы интервала $v_{\min} < v < v_{\max}$, в пределах которого лежит значение скорости v.

1. Чему может быть равна скорость v? Достаточно одного значения.
2. Определите границы интервала $v_{\min}$ и $v_{\max}$ возможных скоростей.

▲ **Решение. Что происходит.** Камера — стробоскоп: она видит колесо только в моменты кадров, через $\tau = 1/30$ с. У диска пять одинаковых

спиц, его вид повторяется при повороте на $1/5$ оборота. Если за время между кадрами колесо поворачивается ровно на целое число пятых долей оборота, каждый кадр одинаков, и спицы кажутся неподвижными. Если чуть больше или чуть меньше — картинка медленно поворачивается на разницу. Колесо катится без проскальзывания, так что частота его вращения прямо связана со скоростью джипа. Класс задачи — стробоскопический эффект (кажущееся движение периодической картинки).

Обозначения. $D = 0{,}72$ м — диаметр колеса, ν — частота вращения колеса (оборотов в секунду), $\tau = 1/30$ с — время между кадрами, n — целое число «пятых долей оборота» за время τ.

1. Связь скорости и частоты. Колесо катится без проскальзывания: за один оборот джип проезжает длину окружности πD. Поэтому

$$v = \pi D\,\nu.$$

2. Условие неподвижной картинки. Соседние спицы разделены углом $360^\circ/5 = 72^\circ$ (рис. 1). Картинка в кадре не отличается от предыдущей, если за время τ колесо повернулось на $n \cdot 72^\circ$, то есть на $n/5$ оборота (рис. 2):

$$\nu\tau = \frac{n}{5} \quad \Rightarrow \quad \nu = \frac{n}{5\tau} = 6n \text{ об/с}.$$

Поворот на целое число оборотов — частный случай (n кратно 5), но не единственный.

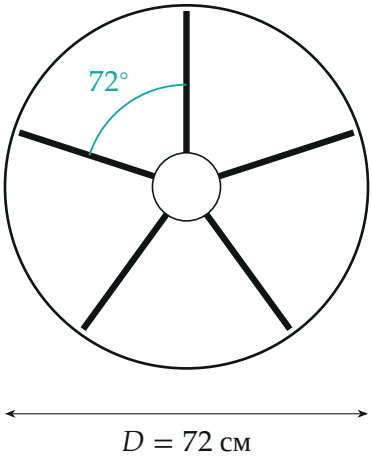

Рис. 1. Схема диска: пять спиц через 72°, картинка повторяется при повороте на 1/5 оборота

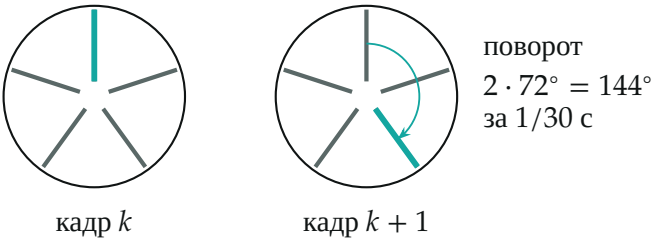

Рис. 2. При $n = 2$ отмеченная спица за время кадра встаёт на место соседней через одну — кадры неотличимы, спицы «стоят»

3. Выбираем n. Скорость

$$v_n = \pi D \cdot \frac{n}{5\tau} = 6n \cdot \pi \cdot 0{,}72 \text{ м/с} = n \cdot 13{,}57 \text{ м/с} = n \cdot 48{,}9 \text{ км/ч}.$$

Под ограничение $80 \le v \le 110$ км/ч попадает только $n = 2$ (рис. 3): $v_1 \approx 49$ км/ч — слишком медленно, $v_3 \approx 147$ км/ч — слишком быстро. Значит,

$$v = v_2 = 12\pi D \text{ м/с} \approx 27{,}1 \text{ м/с} \approx 97{,}7 \text{ км/ч},$$

колесо делает $\nu = 12$ об/с.

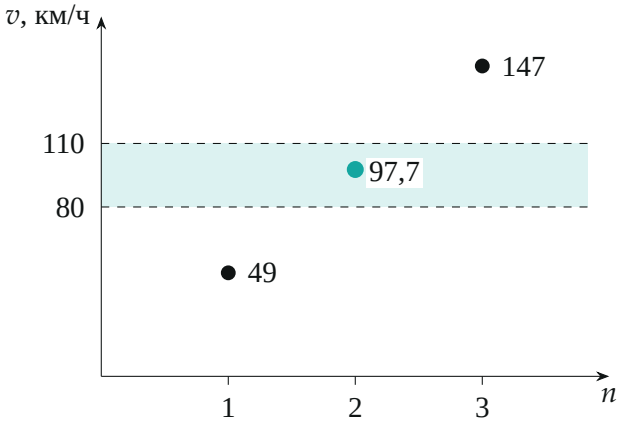

Рис. 3. Скорости, при которых спицы кажутся неподвижными; в разрешённую полосу 80–110 км/ч попадает только $n = 2$

Пункт 2.

4. Медленное вращение картинки. Пусть за время кадра колесо поворачивается на $2/5$ оборота плюс малую добавку δ оборота. Тогда картинка в каждом кадре поворачивается на δ — глаз связывает спицу с ближайшей, а не с той, что ушла на 144°. За секунду картинка делает 30δ оборотов, а по условию — не больше одного оборота за 10 с: $30|\delta| \le 0{,}1$ об/с. Частота колеса $\nu = 12 + 30\delta$ лежит в пределах

$$11{,}9 \text{ об/с} \le \nu \le 12{,}1 \text{ об/с}.$$

Знак δ не виден: картинка крутится вперёд, если колесо чуть быстрее, и назад, если чуть медленнее (рис. 4).

5. Интервал скоростей. По формуле шага 1:

$$v_{\min} = 11{,}9 \cdot \pi \cdot 0{,}72 \cdot 3{,}6 \text{ км/ч} \approx 96{,}9 \text{ км/ч},$$

$$v_{\max} = 12{,}1 \cdot \pi \cdot 0{,}72 \cdot 3{,}6 \text{ км/ч} \approx 98{,}5 \text{ км/ч}.$$

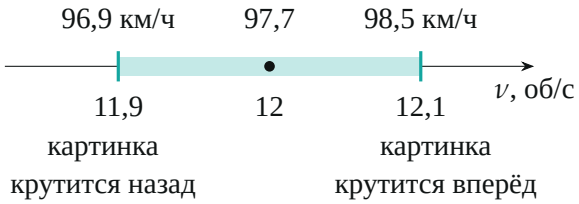

Рис. 4. Допустимые частоты колеса и скорости джипа: в центре спицы стоят, к краям интервала картинка крутится всё быстрее, до оборота за 10 с

Обратите внимание. Неподвижные спицы не значат, что колесо делает целое число оборотов за кадр: достаточно повернуться на целое число *пятых* долей. Решение $\nu = 30n$ об/с (целые обороты) дало бы $v \geq 244$ км/ч — вне условия.

Проверка. Размерность: $\pi D\nu$ — м·с$^{-1}$. Подстановка: при $v = 97{,}7$ км/ч $= 27{,}14$ м/с частота $\nu = 27{,}14/(\pi \cdot 0{,}72) = 12{,}0$ об/с, поворот за кадр $12/30 = 0{,}4 = 2/5$ оборота — как и требовалось. Ширина интервала $\pm 0{,}1/12 \approx \pm 0{,}8\,\%$ от скорости, то есть $\pm 0{,}8$ км/ч — совпадает с найденными границами. У организаторов 96,8 и 98,4 км/ч и 97,6 км/ч: они округлили длину окружности колеса до 2,26 м ($\pi \cdot 0{,}72 = 2{,}262$ м), отсюда разница в 0,1 км/ч.

Смысл: видео со смартфона работает как стробоскоп, и по «замершим» спицам можно мерить скорость с точностью до процента.

Ответ. 1) $v = \dfrac{2\pi D}{5\tau} = 12\pi D$ с$^{-1}$ $\approx 97{,}7$ км/ч ($n = 2$); 2) $v_{\min} \approx 96{,}9$ км/ч, $v_{\max} \approx 98{,}5$ км/ч.