Тень начинает притягиваться

Задача 5. [МОШ 2019/20, 9 класс, задача 5] Широко известен опыт, который обычно называют «притягивающиеся тени». Протяжённый источник света освещает два предмета, и тень одного как бы притягивается к тени другого. Опыт иллюстрируют рис. 1 и рис. 2.



Рис. 1: Лампа освещает линейку и книжку. На стене наблюдаются тени.

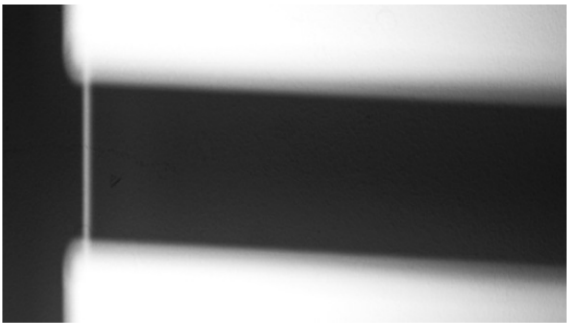

Рис. 2: Область «притягивающихся» теней. Фрагмент фотографии сильно увеличен.

Рассмотрим упрощённую схему опыта, изображённую на рис. 3. Протяжённый источник AB освещает книжку и линейку. Поперечный размер источника равен $D = 6$ см, он расположен так, что осевая линия c проходит через середину отрезка AB. Расстояния, обозначенные на рис. 3, известны, $a = 10$ см.

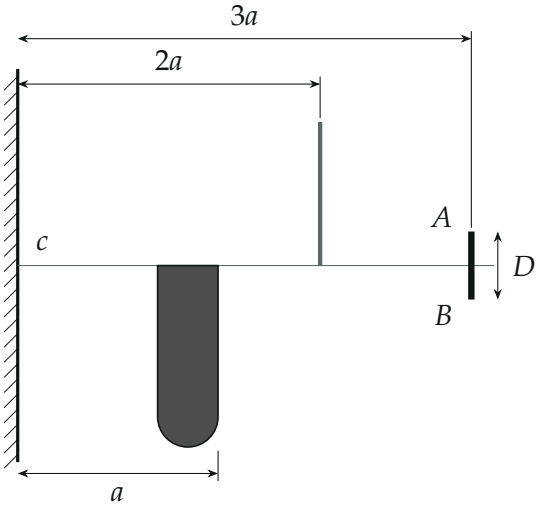

Рис. 3

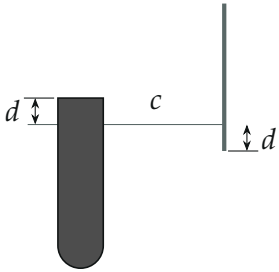

Рис. 4

Книжка и линейка отстоят от осевой линии c на одинаковое (неизвестное) расстояние d, как схематично показано на рис. 4 (соотношения между длинами изменены для удобства восприятия). При каких значениях d на стене между областью полной тени линейки и полной тени книжки будет наблюдаться область полутени? Рассмотрите два случая.

1. Точки отрезка AB излучают изотропно (равномерно по всем направлениям).
2. Любая точка источника испускает лучи света, составляющие с осевой линией угол не более, чем α, при этом $\operatorname{tg}\alpha = 0{,}15$.

Примечание. Полной тенью называется область на стене, в которую не попадает ни один луч света от источника.

▲ **Решение. Что происходит.** Книжка закрывает свет снизу до высоты $+d$ (на расстоянии a от стены), линейка — сверху до высоты $-d$ (на расстоянии $2a$). Если смотреть со стороны источника, края перекрываются, а между ними остаётся наклонная щель. Свет проходит через неё только по крутым лучам: луч должен пройти под нижним концом линейки и над верхним краем книжки, то есть подниматься к стене достаточно круто. От точечного источника на оси такого луча нет — тени слились бы. Протяжённый источник даёт такие лучи из своих нижних точек: из каждой

видна лишь часть источника — это полутень между тенями. Класс задачи — прямолинейное распространение света, тени и полутени от протяжённого источника; ключевой — граничный луч, касающийся обоих краёв.

Обозначения. Ось x — от стены к источнику, ось y — вверх от осевой линии. Край книжки $K = (a;\, d)$, край линейки $L = (2a;\, -d)$, источник — отрезок $x = 3a$, $-D/2 \le y \le D/2$.

Пункт 1.

1. Граничный луч. Через щель проходит луч, если на расстоянии $2a$ он ниже $-d$, а на расстоянии a — выше $+d$. Самый пологий из таких лучей проходит через оба края K и L (рис. 5). На участке от $x = 2a$ до $x = a$ он поднимается на $2d$, значит, на каждом отрезке длины a — тоже на $2d$. Продолжим его к источнику ещё на a от линейки: там он на высоте

$$y_{\text{ист}} = -d - 2d = -3d.$$

Все остальные лучи через щель идут круче и начинаются ниже $-3d$.

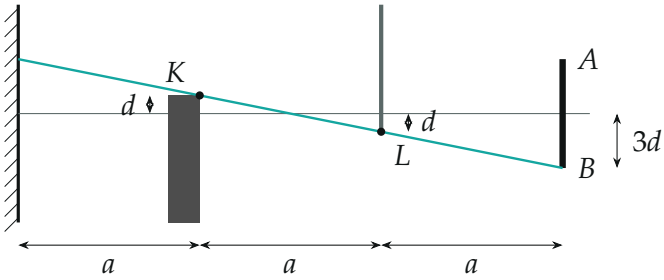

Рис. 5. Предельный случай $d = D/6 = 1$ см, в масштабе: луч через оба края K и L выходит ровно из нижней точки B источника

2. Условие полутени. Чтобы хоть один луч прошёл, у источника должны быть точки ниже $-3d$:

$$3d < \frac{D}{2} \quad \Rightarrow \quad d < \frac{D}{6} = 1 \text{ см}.$$

При $d \ge 1$ см ни одна точка источника не светит в щель: полные тени книжки и линейки сливаются — тень «притянулась». При $d < 1$ см

между ними есть полоса, куда попадает свет лишь части источника, — полутень. Полностью освещённых точек там нет: из любой точки этой полосы верхняя часть источника закрыта (рис. 6).

3. Где полутень на стене. Граничный луч пересекает стену на высоте $+3d$ (симметрично), а луч из нижней точки B под краем линейки — на высоте $D - 3d$: от $y = -D/2$ на $x = 3a$ до $-d$ на $x = 2a$ он поднимается на $D/2 - d$ за каждое a, до стены ещё $2a$. Полутень — полоса $3d < y < D - 3d$, она исчезает как раз при $d = D/6$. При $d = 0{,}6$ см это 1,8–4,2 см (рис. 7).

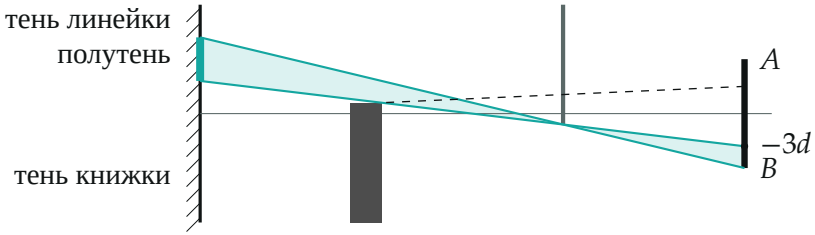

Рис. 6. $d = 0{,}6$ см: свет через щель идёт только от нижней части источника ниже $-3d$ (закрашено); пунктир — луч от верхней части, его задерживает книжка

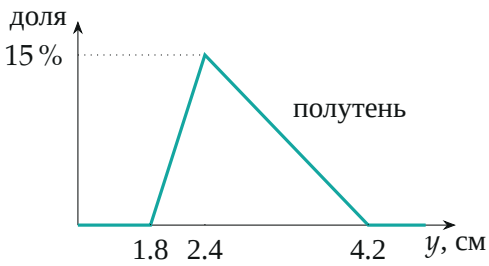

Рис. 7. $d = 0{,}6$ см: доля источника, видимая из точки стены на высоте y (посчитано python); вне 1,8–4,2 см — полная тень

Пункт 2.

4. Ограничение по углу. Теперь каждый луч составляет с осью угол не больше α, то есть поднимается не круче чем на $a \operatorname{tg} \alpha$ на каждом отрезке длины a. Луч через щель должен подниматься быстрее $2d$ на отрезке

a (шаг 1; граничный луч KL поднимается ровно на $2d$). Значит, нужно

$$\frac{2d}{a} < \operatorname{tg}\alpha \quad \Rightarrow \quad d < \frac{a\operatorname{tg}\alpha}{2} = \frac{10 \cdot 0{,}15}{2}\ \text{см} = 0{,}75\ \text{см} = 7{,}5\ \text{мм}.$$

Источник при этом должен иметь точку ниже $-3d = -2{,}25$ см — она есть ($-D/2 = -3$ см), так что условие пункта 1 выполнено и решает только угол (рис. 8).

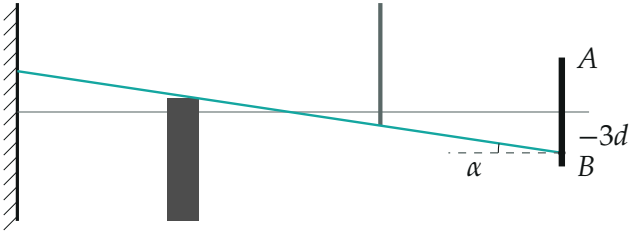

Рис. 8. Пункт 2, предельный случай $d = 7{,}5$ мм: единственный луч через щель идёт под наибольшим углом α к оси

Обратите внимание. Полутень между тенями дают только нижние точки источника, а не весь источник: из каждой точки полутени видна лишь часть AB. Поэтому полностью освещённой полосы между тенями нет ни при каком d — либо полутень, либо слитая тень.

Проверка. Размерность: $D/6$ и $a\operatorname{tg}\alpha/2$ — длины. Предел: точечный источник ($D \to 0$) — полутени нет при любом $d > 0$, тени всегда слиты, это и есть «притяжение». Второй способ для пункта 1 — подобие треугольников: граничный луч и ось образуют подобные треугольники с вершиной на оси посередине между K и L (на расстоянии $1{,}5a$ от стены); катеты d на плече $a/2$ и $D/2$ на плече $1{,}5a$ дают $D/2 = 3d$ — то же.

Смысл: тени «притягиваются», потому что щель между перекрывающимися краями видна только под крутым углом, а свет под таким углом даёт лишь край протяжённого источника.

Ответ. 1) $d < \dfrac{D}{6} = 1$ см; 2) $d < \dfrac{a\operatorname{tg}\alpha}{2} = 7{,}5$ мм.