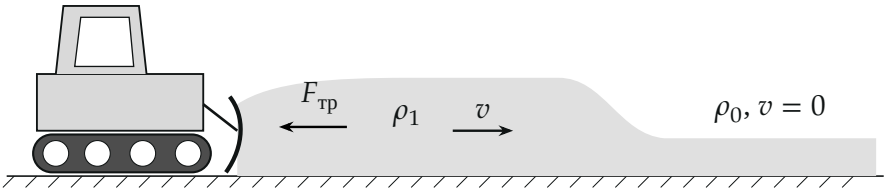
Похоже на уборку снега

Задача 2. [МОШ 2020/21, 10 класс, задача 2] Некоторые особенности процесса сгребания снега бульдозером можно описать на основе следующей простейшей модели. Вдали от бульдозера (см. рис.) слой снега имеет линейную плотность ρ_0 и покоится. Бульдозер и часть снега, прилегающая к его щиту, движутся с постоянной скоростью v. На движущуюся часть действует сила трения, удовлетворяющая закону Кулона-Амонтона: $F_{\text{тр}} = \mu N$; коэффициент трения μ считается известным. Ускорение свободного падения равно g.



1. Пусть весь снег, вовлекаемый бульдозером в движение, распределяется в движущейся части со средней постоянной линейной плотностью ρ_1. Бульдозер в состоянии развить мощность не более, чем W_0. Найдите время t, в течение которого возможно движение бульдозера с постоянной скоростью v.
2. Пусть после того, как масса снега в движущейся части достигает некоторого значения M_0, она перестаёт увеличиваться. При вовлечении в движение порции снега, такая же порция покидает движущуюся часть, скатываясь вбок относительно направления движения. Какую мощность W_1 должен развивать бульдозер при движении с постоянной скоростью v в этом случае?

▲ **Решение. Что происходит.** Это задача о движении тела переменной массы. Перед щитом растёт «вал» движущегося снега: его передний край набегает на покоящийся снег и вовлекает его в движение. Чтобы разогнать каждую новую порцию от нуля до v, нужна сила (второй закон Ньютона в импульсной форме), и ещё нужна сила против трения, которая растёт вместе с массой вала. Поэтому необходимая мощность

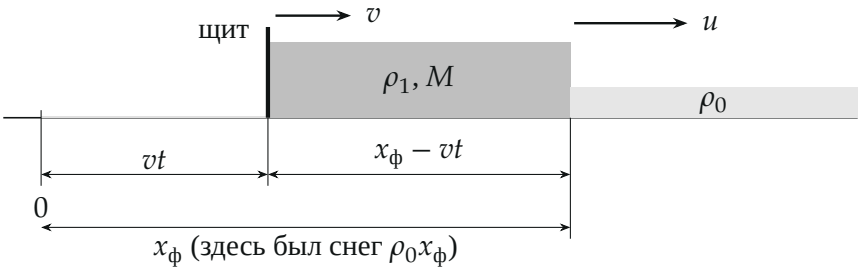
растёт со временем, и в какой-то момент превысит W_0. Скорость фронта вала найдём из сохранения массы.

Обозначения. Ось x — по движению бульдозера, начало — там, где щит был в момент $t = 0$ (масса вала тогда нуль); $x_{щ} = vt$ — координата щита; $x_{ф}$ — координата переднего края (фронта) движущегося снега, u — его скорость; $M(t)$ — масса движущегося снега; F — сила, с которой щит толкает снег; $W = Fv$ — мощность бульдозера (на сам бульдозер, движущийся равномерно, сила тяги и сопротивление уравновешены, его собственное трение в задаче не учитывается).

Пункт 1.

1. Сохранение массы: скорость фронта. Весь снег на участке $0 < x < x_{ф}$, лежавший там с плотностью ρ_0, теперь в валу, а вал занимает отрезок от щита до фронта с плотностью ρ_1:

$$M = \rho_0 x_{ф} = \rho_1 (x_{ф} - vt).$$



Снимок в момент t: весь снег, лежавший на отрезке длиной $x_ф$, теперь собран в валу длиной $x_ф - vt$. Фронт уходит вперёд быстрее щита: $u > v$.

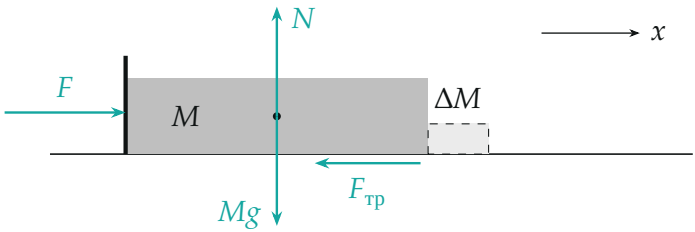
Отсюда

$$x_{ф} = \frac{\rho_1 vt}{\rho_1 - \rho_0}, \qquad u = \frac{\rho_1 v}{\rho_1 - \rho_0}, \qquad M(t) = \rho_0 x_{ф} = \frac{\rho_0 \rho_1}{\rho_1 - \rho_0} vt.$$

Масса вала растёт равномерно со скоростью $\dfrac{\Delta M}{\Delta t} = \rho_0 u = \dfrac{\rho_0 \rho_1 v}{\rho_1 - \rho_0}$.

Модель имеет смысл при $\rho_1 > \rho_0$: снег перед щитом уплотняется.

2. Сила со стороны щита. Система — весь снег вала вместе с порцией ΔM, которая за время Δt вовлекается в движение. На неё по горизонтали действуют сила щита F вперёд и трение $F_{\text{тр}} = \mu N = \mu M g$ назад (вал лежит на горизонтальной земле, $N = Mg$).



Силы, действующие на движущийся снег. Порция ΔM (пунктир) за время Δt разгоняется от нуля до v.

Второй закон Ньютона в импульсной форме в проекции на ось x: за время Δt импульс системы меняется от $Mv + \Delta M \cdot 0$ до $(M + \Delta M)v$,

$$(F - \mu M g)\,\Delta t = \Delta M\, v \quad \Rightarrow$$
$$F = \mu M g + v\,\frac{\Delta M}{\Delta t} = \mu g\,\frac{\rho_0\rho_1}{\rho_1 - \rho_0}\,vt + \frac{\rho_0\rho_1}{\rho_1 - \rho_0}\,v^2.$$

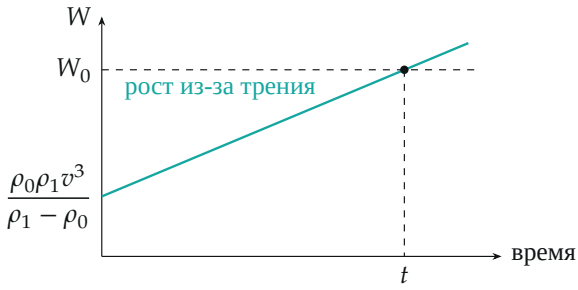
Плюс: сила щита направлена по движению. Второе слагаемое — «реактивная» добавка на разгон нового снега, она постоянна; первое — трение, оно растёт.

3. Мощность и время. Мощность бульдозера $W = Fv$:

$$W(t) = \frac{\rho_0\rho_1}{\rho_1 - \rho_0}\,v^2\,(\mu g t + v).$$

Равномерное движение возможно, пока $W(t) \le W_0$. Условие $W(t) = W_0$ даёт

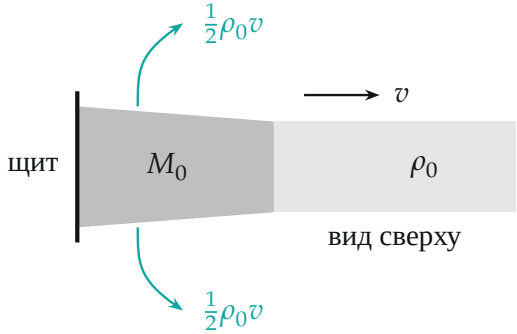
$$t = \frac{W_0}{\mu g v^2}\cdot\frac{\rho_1 - \rho_0}{\rho_1\rho_0} - \frac{v}{\mu g}.$$



Нужная мощность линейно растёт со временем: начальное значение тратится на разгон нового снега, рост — на трение растущего вала.

Пункт 2.

4. Установившийся режим. Теперь масса вала постоянна, $M = M_0$, и вал не удлиняется: фронт движется со скоростью щита v. За время Δt фронт проходит $v\Delta t$ и вовлекает массу $\Delta m = \rho_0 v\Delta t$; такая же масса уходит вбок.



Вид сверху в установившемся режиме: снег входит в вал спереди (масса $\rho_0 v$ в единицу времени) и столько же скатывается в стороны, сохраняя скорость v вдоль движения.

5. Сила и мощность. Система — вал вместе с входящей и уходящей порциями. Уходящий снег, скатываясь вбок, движется вперёд со скоростью вала v, поэтому импульс вдоль оси x меняется только за счёт разгона входящей порции. Второй закон Ньютона в проекции на x:

$$(F_1 - \mu M_0 g)\,\Delta t = \Delta m\, v = \rho_0 v^2 \Delta t \quad \Rightarrow \quad F_1 = \mu M_0 g + \rho_0 v^2,$$

$$W_1 = F_1 v = \mu M_0 g v + \rho_0 v^3.$$

Обратите внимание. Разгон снега требует силы $v\,\Delta M/\Delta t$ даже без трения: каждая порция получает импульс скачком (неупругое столкновение), и половина работы щита на разгон уходит в тепло. В пункте 1 скорость вовлечения массы определяется фронтом ($u > v$), а не щитом.

Ответ. 1) $t = \dfrac{W_0}{\mu g v^2} \cdot \dfrac{\rho_1 - \rho_0}{\rho_1 \rho_0} - \dfrac{v}{\mu g}$; 2) $W_1 = \mu M_0 g v + \rho_0 v^3$.

Проверка. Размерность: ρ_0 — кг/м, $\rho_0 v^3$ — кг $\cdot$ м^2/с^3 = Вт; $W_0/(\mu g v^2 \rho_0)$ — Вт/(м^3/с^4 $\cdot$ кг/м) = с, верно. Предел $\rho_1 \to \infty$ (снег спрессован в тонкий слой у щита): фронт идёт со скоростью v, $\Delta M/\Delta t \to \rho_0 v$ и $W(t) \to \rho_0 v^2(\mu g t + v)$ — переходит в формулу пункта 2 с $M_0 = \rho_0 v t$. Если $W_0 < \rho_0 \rho_1 v^3/(\rho_1 - \rho_0)$, получается $t < 0$: бульдозер не может ехать с такой скоростью даже в начале.

Смысл: мощность бульдозера уходит на трение растущего вала и на разгон нового снега; когда вал перестаёт расти, мощность выходит на постоянное значение.

Ответ. 1) $t = \dfrac{W_0}{\mu g v^2} \cdot \dfrac{\rho_1 - \rho_0}{\rho_1 \rho_0} - \dfrac{v}{\mu g}$; 2) $W_1 = \mu M_0 g v + \rho_0 v^3$.