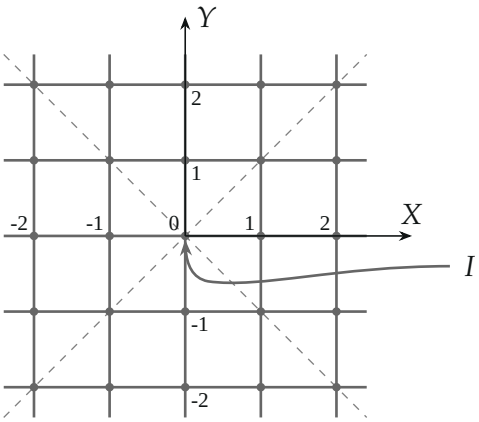
Ну очень большая сетка

Задача 3. [МОШ 2020/21, 10 класс, задача 3] Сетка в форме квадрата состоит из очень большого количества ячеек. В узел с координатами $(0, 0)$, совпадающий с центром квадрата, втекает ток $I = 4$ А (см. рисунок). Сопротивление любого проводника, соединяющего соседние узлы сетки, равно 1 Ом.

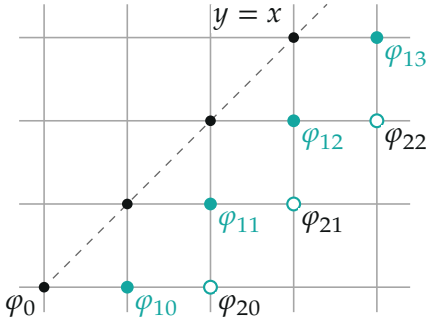


1. Пусть узлы сетки на стороне большого квадрата подключены к специальному источнику напряжения, так что потенциалы узлов, лежащих на диагоналях (см. рис., пунктирные линии), равны нулю везде кроме центра квадрата, где потенциал равен 1 В. Определите потенциалы φ_{1k} в узлах с координатами $(k+1,\, k)$, и потенциалы φ_{2k} в узлах с координатами $(k+2,\, k)$ при $k \geq 0$.
2. Источник напряжения заменили на другой — ещё более специальный. Теперь потенциалы узлов и на диагоналях, и в центре равны нулю. Чему равны потенциалы φ_{1k} в узлах с координатами $(k+1,\, k)$, и потенциалы φ_{2k} в узлах с координатами $(k+2,\, k)$ при $k \geq 0$ в этом случае?

▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на правила Кирхгофа в бесконечной сетке. Источник подключён только к узлам на краю большого квадрата, поэтому во всех внутренних узлах, кроме центра, выполняется первое правило Кирхгофа: сколько тока втекает, столько и вытекает.

При сопротивлениях проводников $r = 1$ Ом оно для узла с четырьмя соседями записывается через потенциалы: потенциал узла — среднее потенциалов соседей. Записав это правило для узлов на диагонали и рядом с ней и использовав симметрию сетки относительно диагонали $y = x$, получим цепочку соотношений, которая «разворачивается» от центра наружу.

Обозначения. $\varphi(x, y)$ — потенциал узла; $\varphi_{1k} = \varphi(k+1, k)$ — узлы первого ряда под диагональю $y = x$, $\varphi_{2k} = \varphi(k+2, k)$ — второго ряда; $\varphi_0 = \varphi(0, 0)$; $r = 1$ Ом; $I = 4$ А.



Узлы, о которых спрашивают: чёрные — на диагонали, бирюзовые — первый ряд $(k+1, k)$, светлые — второй ряд $(k+2, k)$.

1. Правило Кирхгофа через потенциалы. Ток по проводнику от узла A к соседнему узлу B по закону Ома равен $(\varphi_A - \varphi_B)/r$. Для узла A с соседями $B_1, \ldots, B_4$, в который извне ничего не втекает, сумма вытекающих токов равна нулю:

$$\sum_{i=1}^{4} \frac{\varphi_A - \varphi_{B_i}}{r} = 0 \quad \Rightarrow \quad 4\varphi_A = \varphi_{B_1} + \varphi_{B_2} + \varphi_{B_3} + \varphi_{B_4}.$$

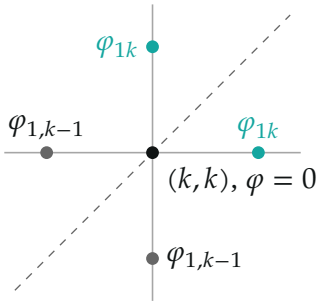
Если же в узел извне втекает ток I, то $\sum(\varphi_A - \varphi_{B_i})/r = I$.

2. Симметрия. Сетка, место втекания тока и условия «нуль на диагоналях» не меняются при отражении относительно диагонали $y = x$ и относительно оси x. Значит, $\varphi(k+1, k) = \varphi(k, k+1)$, а четыре соседа центра имеют одинаковый потенциал $\varphi(1, 0) = \varphi_{10}$.

3. Центр: первый узел цепочки. В центр втекает ток I и поровну расходится по четырём проводникам:

$$\frac{4(\varphi_0 - \varphi_{10})}{r} = I \quad \Rightarrow \quad \varphi_{10} = \varphi_0 - \frac{Ir}{4} = \varphi_0 - 1\ \text{В}.$$

4. Узел на диагонали. Узел (k,k), $k \geq 1$, к источнику не подключён, его потенциал равен нулю. Его соседи: $(k+1,k)$ и $(k,k+1)$ с потенциалом φ_{1k}, $(k-1,k)$ и $(k,k-1)$ с потенциалом $\varphi_{1,k-1}$ (узел $(k,k-1) = ((k-1)+1,\, k-1)$).



Узел (k,k) на диагонали и его четыре соседа: двое — из ряда k, двое — из ряда $k-1$.

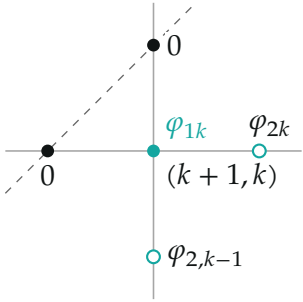
Правило из шага 1:

$$4 \cdot 0 = 2\varphi_{1k} + 2\varphi_{1,k-1} \quad \Rightarrow \quad \varphi_{1k} = -\varphi_{1,k-1} = (-1)^k \varphi_{10}.$$

5. Узел первого ряда. Узел $(k+1,k)$, $k \geq 1$, имеет соседей (k,k) и $(k+1,k+1)$ на диагонали (потенциал 0), $(k+2,k)$ с потенциалом φ_{2k} и $(k+1,k-1) = ((k-1)+2,\, k-1)$ с потенциалом $\varphi_{2,k-1}$:

$$4\varphi_{1k} = \varphi_{2k} + \varphi_{2,k-1}.$$

Для $k = 0$ узел $(1,0)$ граничит с центром $(0,0)$, с $(2,0)$ и с диагональными $(1,\pm 1)$: $4\varphi_{10} = \varphi_0 + \varphi_{20}$.



Узел $(k+1,k)$: два соседа на диагонали (нуль), два — во втором ряду.

Пункт 1: $\varphi_0 = 1$ **В.**

Шаг 3: $\varphi_{10} = 1 - 1 = 0$. Шаг 4: $\varphi_{1k} = (-1)^k \cdot 0 = 0$ при всех k. Шаг 5 при $k = 0$: $\varphi_{20} = 4\varphi_{10} - \varphi_0 = -1$ В; при $k \geq 1$: $\varphi_{2k} = -\varphi_{2,k-1}$. Итак,

$$\varphi_{1k} = 0, \qquad \varphi_{2k} = (-1)^{k+1} \text{ В}.$$

Пункт 2: $\varphi_0 = 0$**.**

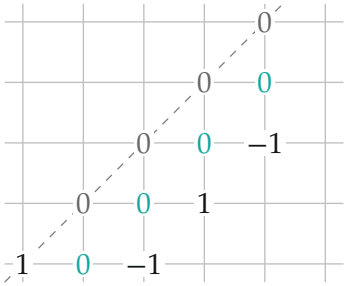
Шаг 3: $\varphi_{10} = -1$ В. Шаг 4: $\varphi_{1k} = (-1)^{k+1}$ В. Шаг 5: при $k = 0$ $\varphi_{20} = 4\varphi_{10} - 0 = -4$ В; при $k \geq 1$

$$\varphi_{2k} = 4\varphi_{1k} - \varphi_{2,k-1} = 4(-1)^{k+1} - \varphi_{2,k-1}.$$

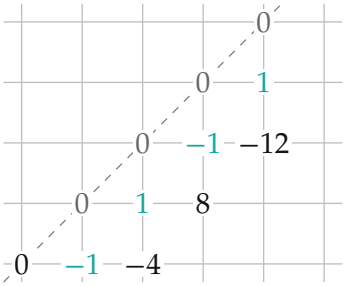
Проверим догадку $\varphi_{2k} = 4(k+1)(-1)^{k+1}$ (в вольтах) по индукции: при $k = 0$ это -4, верно; если $\varphi_{2,k-1} = 4k(-1)^k$, то $\varphi_{2k} = 4(-1)^{k+1} + 4k(-1)^{k+1} = 4(k+1)(-1)^{k+1}$. Итак,

$$\varphi_{1k} = (-1)^{k+1} \text{ В}, \qquad \varphi_{2k} = 4(k+1)(-1)^{k+1} \text{ В}.$$

Пункт 1



Пункт 2



Потенциалы узлов (в вольтах) в секторе под диагональю $y = x$: в пункте 1 первый ряд весь нулевой, во втором знаки чередуются; в пункте 2 знаки чередуются, а модуль во втором ряду растёт линейно.

Обратите внимание. Правило Кирхгофа можно писать для узлов на диагоналях: источник подключён только к краю большого квадрата, а нулевой потенциал диагоналей — следствие его особой настройки, а не провод к земле. Именно уравнение для диагонального узла даёт чередование знаков.

Ответ. 1) $\varphi_{1k} = 0$, $\varphi_{2k} = (-1)^{k+1}$ В; 2) $\varphi_{1k} = (-1)^{k+1}$ В, $\varphi_{2k} = 4(k+1)\cdot(-1)^{k+1}$ В.

Проверка. Подставим числа пункта 2 в уравнение узла $(2,1)$: соседи $(1,1)$, $(2,2)$ — нули, $(3,1)$ — $\varphi_{21} = 8$, $(2,0)$ — $\varphi_{20} = -4$; $4\varphi_{11} = 4\cdot 1 = 8 + (-4)$ — верно. Узел $(1,1)$: $2\varphi_{11} + 2\varphi_{10} = 2 - 2 = 0$ — верно. Размерность: $Ir/4$ — вольты.

Смысл: заданные на диагоналях нули вместе с током в центре однозначно определяют потенциалы соседних рядов, и знаки чередуются от узла к узлу вдоль диагонали.

Ответ. 1) $\varphi_{1k} = 0$, $\varphi_{2k} = (-1)^{k+1}$ В; 2) $\varphi_{1k} = (-1)^{k+1}$ В, $\varphi_{2k} = 4(k+1)(-1)^{k+1}$ В.