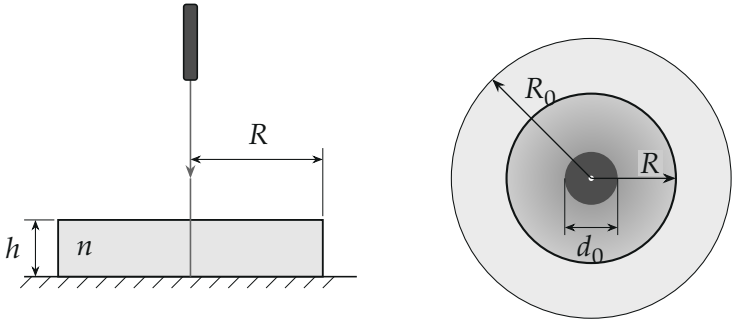
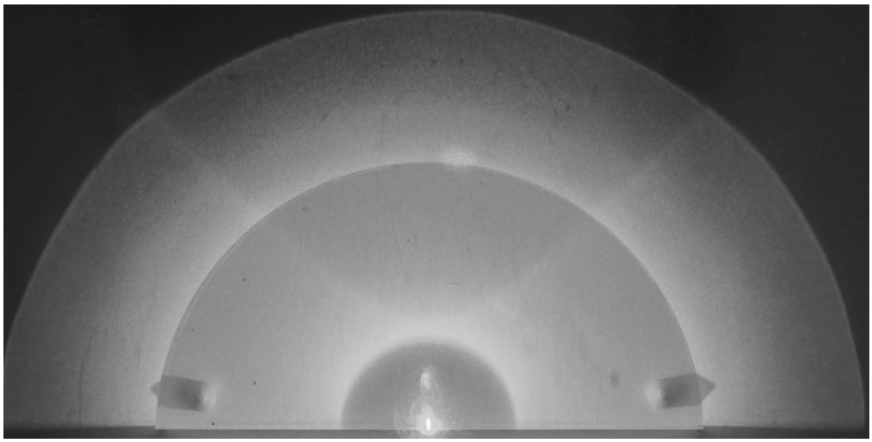
Ореол и тёмный круг

Задача 4. [МОШ 2020/21, 10 класс, задача 4] На горизонтальной поверхности располагается диск радиусом R и толщиной h, сделанный из стекла с показателем преломления $n = 1{,}5$ (рис. ниже, слева). Нижняя матовая сторона диска отражает свет диффузно (иначе говоря, равномерно в любых направлениях). Верхняя и боковая поверхности диска тщательно отшлифованы. Луч мощной лазерной указки, освещающей диск, направлен вдоль его оси. При рассматривании диска сверху (рис. ниже, справа) наблюдаются: ярко выраженный тёмный круг с нечёткой границей диаметром d_0 и светлый ореол с резкой границей в виде концентрической с диском окружности радиусом R_0.



Ниже вы видите фотографию, полученную при проведении опыта, похожего на описанный выше. Мощной лазерной указкой освещалась нижняя точка середины половинки стеклянного диска. Можно различить тёмный полукруг с размытой границей и светлый ореол с резкой границей.



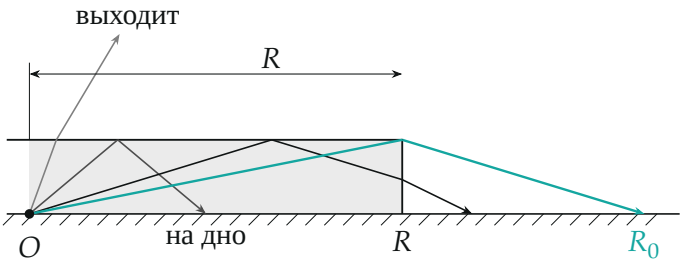
1. Известно, что толщина диска равна $h = 14$ мм, а отношение радиусов диска и границы ореола равно $\dfrac{R_0}{R} \approx 1{,}65$ (это значение получается при измерениях по фотографиям опытов). Найдите радиус диска R.
2. Чем может быть обусловлено возникновение тёмного круга? Оцените его радиус r_0, считая показатель преломления и толщину диска известными.

Примечание. Можно считать, что в условиях данной задачи для лучей, выходящих из стекла в воздух, от границы раздела отражается не более 10 % энергии падающего излучения, если величина угла падения меньше 37°.

▲ **Решение. Что происходит.** Это задача геометрической оптики на полное внутреннее отражение и преломление. Лазер даёт на матовом дне в центре яркую точку, которая рассеивает свет внутри стекла во все стороны — это точечный источник на дне. Луч от него, идущий под углом α к вертикали, либо выходит через верх (малые α), либо отражается от верхней грани обратно вниз (большие α, полное внутреннее отражение). Отражённые лучи либо снова попадают на матовое дно и подсвечивают его, либо (самые пологие) доходят до боковой грани, выходят наружу вниз и освещают стол *за краем диска* — это и есть ореол с $R_0 > R$. Его резкую границу даёт самый пологий из таких лучей — тот, что отража-

ется от верхней грани в самом углу диска.

Обозначения. O — светящаяся точка в центре дна; α — угол луча с вертикалью в стекле; β — угол вышедшего через боковую грань луча с горизонталью (нормаль к боковой грани горизонтальна); $\alpha_{\text{пр}}$ — предельный угол полного отражения, $\sin\alpha_{\text{пр}} = 1/n$; z — высота, на которой луч выходит через бок.



Ход лучей от светящейся точки O (правая половина разреза, масштаб истинный для найденного $R \approx 70$ мм): крутой луч выходит через верх, луч под $50°$ после полного отражения возвращается на дно, пологие — выходят через бок вниз; бирюзовый луч через угол диска долетает дальше всех, до R_0.

Пункт 1.

1. Какие лучи выходят через бок вниз. Луч под углом α поднимается на высоту h, проходя по горизонтали $h\operatorname{tg}\alpha$. При $\alpha > \alpha_{\text{пр}} = \arcsin(1/1{,}5) = 41{,}8°$ он полностью отражается от верхней грани и опускается под тем же углом. До боковой грани $x = R$ он дойдёт, не коснувшись дна, на высоте

$$z = 2h - R\operatorname{ctg}\alpha, \qquad 0 < z \leq h.$$

На боковой грани угол падения равен $90° - \alpha$, и закон преломления $n\sin(90° - \alpha) = \sin\beta$ даёт

$$\sin\beta = n\cos\alpha.$$

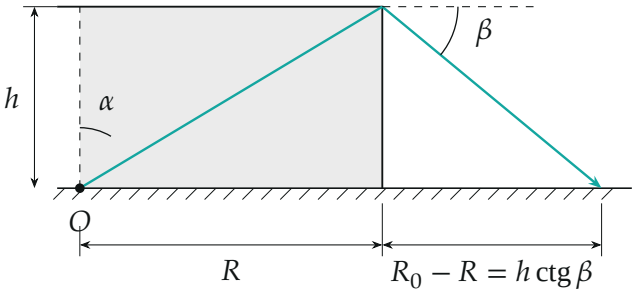
Выйдя, луч идёт вниз под углом β к горизонтали и падает на стол на

расстоянии от оси

$$x(\alpha) = R + z\operatorname{ctg}\beta = R + (2h - R\operatorname{ctg}\alpha)\operatorname{ctg}\beta.$$

2. Где граница ореола. С ростом α высота z растёт, а β уменьшается (луч выходит более полого), поэтому $x(\alpha)$ растёт. Самый большой угол, при котором луч ещё отражается от верхней грани, а не уходит сразу в бок, — когда точка отражения попадает в угол диска: $\operatorname{tg}\alpha_\text{m} = R/h$. Лучи круче дальше не летят, а лучи положе бьют в бок на подъёме и уходят вверх. Значит, за $x(\alpha_\text{m})$ свет на стол не попадает — граница ореола резкая:

$$R_0 = x(\alpha_\text{m}) = R + h\operatorname{ctg}\beta_\text{m}, \qquad \sin\beta_\text{m} = n\cos\alpha_\text{m} = \frac{nh}{\sqrt{R^2+h^2}}.$$



Граничный луч (масштаб по вертикали растянут): отражается от верхней грани в самом углу и выходит через ребро; $\operatorname{tg}\alpha_m = R/h$.

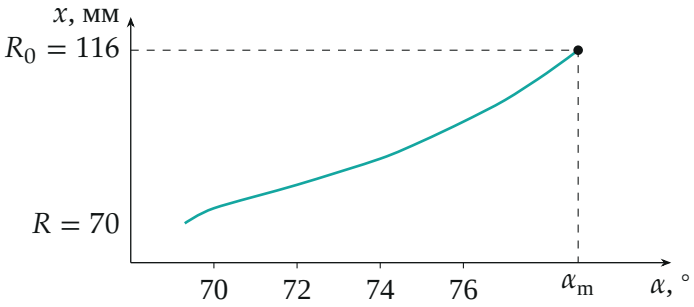
3. Уравнение для R**.** Из $R_0 - R = h\operatorname{ctg}\beta_\text{m}$ и $R_0 = 1{,}65R$:

$$0{,}65R = h\frac{\sqrt{1-\sin^2\beta_\text{m}}}{\sin\beta_\text{m}} = h\frac{\sqrt{R^2+h^2-n^2h^2}}{nh},$$

$$(0{,}65n)^2R^2 = R^2 - (n^2-1)h^2,$$

$$R = \frac{h\sqrt{n^2-1}}{\sqrt{1-(0{,}65n)^2}} = \frac{14\cdot 1{,}118}{\sqrt{1-0{,}9506}}\ \text{мм} \approx 70\ \text{мм}.$$

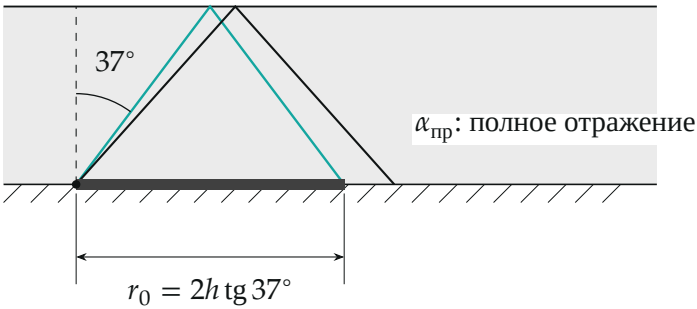
Проверим условия: $\alpha_m = \operatorname{arctg}(70/14) = 78{,}8° > 41{,}8°$ — полное отражение есть; $\sin\beta_m = 1{,}5\cos 78{,}8° = 0{,}29 < 1$ — луч выходит через бок, $\beta_m = 17°$.



Расстояние от оси до точки, куда падает на стол луч, вышедший через бок (расчёт для $R = 70$ мм, $h = 14$ мм). Оно растёт с α и обрывается на α_m — отсюда резкая граница ореола.

Пункт 2.

4. Откуда тёмный круг. Сверху мы видим матовое дно, подсвеченное светом, вернувшимся к нему после отражения от верхней грани. Луч под углом α возвращается на дно на расстоянии $r = 2h\operatorname{tg}\alpha$ от центра. Крутые лучи ($\alpha < 37°$) по примечанию отражаются слабо (меньше 10 %) и почти целиком уходят наружу через верх, поэтому дно на расстояниях $r < 2h\operatorname{tg}37°$ почти не подсвечено и выглядит тёмным. При α от 37° до $\alpha_{пр} = 41{,}8°$ доля отражённого света быстро растёт до 100 %, поэтому граница круга размытая.



Тёмный круг: лучи круче 37° отражаются от верха слабо, и дно внутри r_0 (тёмная полоса) почти не подсвечено; бирюзовый луч под 37° даёт границу, чёрный — под предельным углом 41,8°.

5. Оценка радиуса. Радиус тёмного круга

$$r_0 \approx 2h\,\mathrm{tg}\,37^\circ = 2\cdot 14\cdot 0{,}754 \text{ мм} \approx 21 \text{ мм},$$

а внешний край размытой зоны — $2h\,\mathrm{tg}\,41{,}8^\circ \approx 25$ мм. Оценка $r_0 \approx 21$–25 мм.

Обратите внимание. Ореол с $R_0 > R$ лежит не на диске, а на столе вокруг него: его дают лучи, вышедшие через боковую грань. У организаторов в формуле ответа пропущен корень в знаменателе: $R = h\sqrt{n^2-1}/\sqrt{1-(0{,}65n)^2}$; их число 70 мм получается именно с корнем.

Ответ. 1) $R = \dfrac{h\sqrt{n^2-1}}{\sqrt{1-(0{,}65n)^2}} \approx 70$ мм; 2) тёмный круг — область дна, куда почти не возвращаются слабо отражённые от верха крутые лучи, $r_0 \approx 2h\,\mathrm{tg}\,37^\circ \approx 21$ мм (размытый край до ≈ 25 мм).

Проверка. Размерность R — как у h. Подстановка: $\alpha_\mathrm{m} = 78{,}8^\circ$, $\beta_\mathrm{m} = 17{,}0^\circ$, $R_0 = 70 + 14\,\mathrm{ctg}\,17^\circ = 70 + 46 = 116$ мм, $116/70 = 1{,}65$ — верно. Предел $n \to 1$: $R \to 0$ — без преломления луч из угла летел бы прямо, $\beta = 90^\circ - \alpha$ и $R_0 - R = R$, то есть $R_0 = 2R$, а не $1{,}65R$; значит, отношение 1,65 действительно задаёт размер.

Смысл: резкая граница ореола — след самого пологого луча, отразившегося в углу диска, а тёмный круг — область дна, куда не возвращается свет, ушедший через верх.

Ответ. 1) $R = \dfrac{h\sqrt{n^2-1}}{\sqrt{1-(0{,}65n)^2}} \approx 70$ мм; 2) $r_0 \approx 2h\,\mathrm{tg}\,37^\circ \approx 21$ мм (граница размыта до ≈ 25 мм).