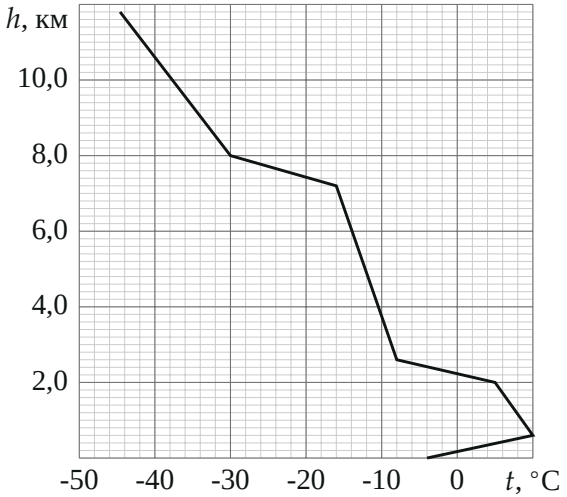
Устойчивость атмосферы

Задача 5. [МОШ 2020/21, 10 класс, задача 5]

1. *Сухой адиабатой* называется такое распределение температуры $T_a(h)$ в атмосфере Земли, что при увеличении высоты малой порции (в метеорологии их называют частицами) сухого воздуха на небольшую величину Δh без теплообмена с окружающими частицами её температура изменяется на малую величину ΔT_a. Найдите ΔT_a, считая Δh известным. Ускорение свободного падения равно $g = 10$ м/с^2. Средние молярные масса и теплоёмкость воздуха при постоянном объёме равны: $\mu = 29$ г/моль и $c_V = 2{,}5R$ ($R = 8{,}3$ Дж/(моль · К)) соответственно. Движением воздушных масс можно пренебречь.
   Указание. Для малых изменений параметров идеального газа (T, p, V) или (T, p, ρ), где ρ — плотность, из уравнения состояния следуют формулы:
   $$\frac{\Delta T}{T} = \frac{\Delta p}{p} + \frac{\Delta V}{V}, \qquad \frac{\Delta T}{T} = \frac{\Delta p}{p} - \frac{\Delta \rho}{\rho}.$$
2. В естественных условиях равновесное распределение температуры воздуха по высоте имеет сложный вид. Линия на графике ниже моделирует зависимость $t(h)$, возникшую в воздухе над городом X в день Y. В физике атмосферы принято откладывать температуру по горизонтальной оси.



Устойчивым является такое равновесное состояние воздуха в атмосфере, что при *адиабатическом* смещении частицы воздуха из положения равновесия по вертикали на небольшую величину Δh, действующие на неё силы стремятся вернуть эту частицу в положение равновесия. Укажите на графике границы (по высоте) участков устойчивой атмосферы. Воздух предлагается считать сухим, наличием паров воды и движением воздушных масс пренебречь, значения, заданные в части А задачи, можно считать известными.

▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на адиабатный процесс идеального газа и закон Архимеда. Частица воздуха, поднятая на Δh, сразу принимает давление окружающего воздуха на новой высоте (давление выравнивается со скоростью звука), а теплом обменяться не успевает: она расширяется адиабатно и охлаждается. Изменение давления с высотой задаёт гидростатика, а изменение температуры частицы — первый закон термодинамики. Во втором пункте сравниваем частицу с окружающим воздухом на новой высоте: при одном давлении холоднее — значит, плотнее, и тогда архимедова сила меньше силы тяжести, частица возвращается.

Обозначения. p, T, V, ρ — давление, температура, объём одного моля и плотность воздуха частицы; Δp, ΔT_a, ΔV — их изменения при подъёме на Δh; $\Gamma_a = -\Delta T_a/\Delta h$ — скорость падения температуры по сухой

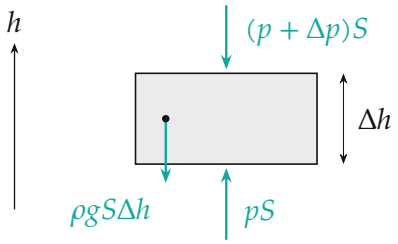
адиабате; $\gamma = \Delta t/\Delta h$ — наклон графика окружающего воздуха (изменение его температуры на километр высоты).

Пункт 1.

1. Давление на новой высоте. Слой воздуха толщиной Δh и площадью S находится в равновесии: давление снизу больше давления сверху на вес слоя, делённый на площадь. Условие равновесия в проекции на вертикальную ось:

$$\Delta p = -\rho g\,\Delta h.$$

Минус: с высотой давление падает.



Силы, действующие на тонкий слой воздуха: разность давлений снизу и сверху держит его вес.

2. Первый закон термодинамики для частицы. Возьмём частицу в один моль. Теплообмена нет, поэтому изменение внутренней энергии равно работе над газом:

$$c_V\,\Delta T_a = -p\,\Delta V.$$

Из первой формулы указания $p\,\Delta V = pV\left(\dfrac{\Delta T_a}{T} - \dfrac{\Delta p}{p}\right) = R\,\Delta T_a - V\Delta p$ (использовали $pV = RT$). Подставляем:

$$c_V\,\Delta T_a = -R\,\Delta T_a + V\Delta p \quad\Rightarrow\quad (c_V + R)\,\Delta T_a = V\Delta p.$$

3. Ответ пункта 1. Объём моля $V = \mu/\rho$, поэтому $V\Delta p =$

$-\dfrac{\mu}{\rho}\rho g\,\Delta h = -\mu g\,\Delta h$, и при $c_V + R = 3{,}5R$:

$$\Delta T_a = -\frac{\mu g}{c_V + R}\Delta h = -\frac{2\mu g}{7R}\Delta h = \\ = -\frac{2\cdot 0{,}029\cdot 10}{7\cdot 8{,}3}\,\frac{\text{К}}{\text{м}}\,\Delta h \approx -9{,}98\cdot 10^{-3}\,\frac{\text{К}}{\text{м}}\,\Delta h.$$

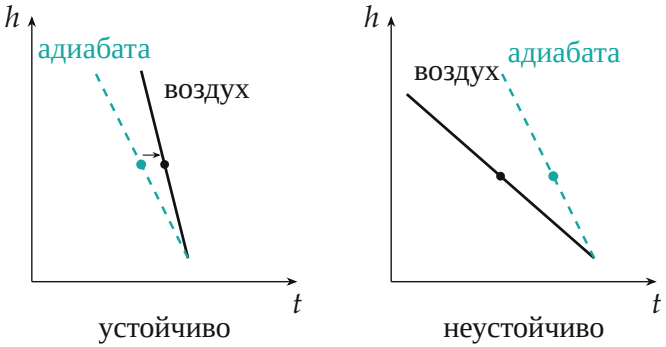
Частица охлаждается примерно на 10 °C на каждый километр подъёма: $\Gamma_a \approx 10\,^\circ$C/км.

Пункт 2.

4. Условие устойчивости. Частицу подняли из равновесия на Δh. Её давление равно давлению окружающего воздуха на новой высоте, температура $T + \Delta T_a$, а у окружающего воздуха там $T + \gamma\Delta h$. По второй формуле указания при равных давлениях $\rho \propto 1/T$: частица плотнее окружения, если она холоднее. Тогда сила тяжести больше архимедовой, и равнодействующая тянет частицу вниз — назад. Условие:

$$T+\Delta T_a < T+\gamma\,\Delta h \quad\Leftrightarrow\quad -\Gamma_a\,\Delta h < \gamma\,\Delta h \quad\Leftrightarrow\quad \gamma > -\Gamma_a \approx -10\,^\circ\text{C/км}.$$

При смещении вниз ($\Delta h < 0$) знаки неравенств меняются оба, и условие то же: частица теплее окружения и всплывает обратно. Итак, атмосфера устойчива, если температура с высотой падает медленнее, чем на 10 °C на километр (или растёт), и неустойчива, если падает быстрее.



Слева: воздух остывает с высотой медленнее адиабаты, поднятая части-

ца (бирюзовая точка) холоднее окружения (чёрная точка) и тонет обратно. Справа: воздух остывает быстрее, поднятая частица теплее окружения и продолжает всплывать.

5. Наклоны участков графика. Снимаем вершины ломаной и считаем $\gamma = \Delta t/\Delta h$ для каждого участка:

h, км	t, °C	γ, °C/км	вывод
0 – 0,6	$-4 \to 10$	+23	устойчиво (инверсия)
0,6 – 2,0	$10 \to 5$	−3,6	устойчиво
2,0 – 2,6	$5 \to -8$	−22	неустойчиво
2,6 – 7,2	$-8 \to -16$	−1,7	устойчиво
7,2 – 8,0	$-16 \to -30$	−17,5	неустойчиво
выше 8,0	$-30 \to -44{,}6$ (11,8 км)	−3,8	устойчиво

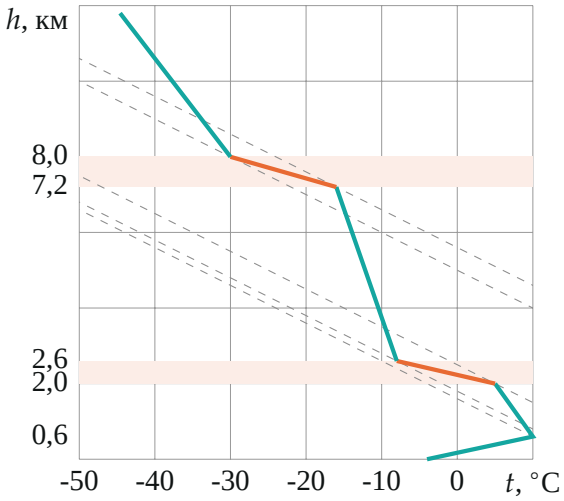


График условия: бирюзовые участки — устойчивая атмосфера, морковные (полосы 2,0–2,6 и 7,2–8,0 км) — неустойчивая. Серые пунктиры — сухие адиабаты (−10 °C/км) через вершины: где график круче адиабаты (ближе к вертикали), там устойчиво.

Обратите внимание. Сравнивать нужно со знаком: инверсия (температура растёт с высотой) самая устойчивая, хотя модуль наклона у неё

большой. В официальном ответе организаторов устойчивыми названы слои 0–600, 2000–2600 и 7200–8000 м — это слои, где $|\gamma| > \Gamma_a$; но на слоях 2000–2600 и 7200–8000 м воздух остывает быстрее адиабаты, и поднятая частица оказывается теплее окружения, так что они неустойчивы, а слои 600–2000 и 2600–7200 м устойчивы.

Ответ. 1) $\Delta T_a = -\dfrac{2\mu g}{7R}\,\Delta h \approx -10\,\dfrac{^\circ\text{C}}{\text{км}}\cdot\Delta h$; 2) устойчиво при $0 < h <$ 2,0 км, 2,6 $< h <$ 7,2 км и $h >$ 8,0 км; неустойчиво в слоях 2,0–2,6 км и 7,2–8,0 км.

Проверка. Размерность $\mu g/R$: $\dfrac{\text{кг/моль}\cdot\text{м/с}^2}{\text{Дж/(моль}\cdot\text{К)}} = \text{К/м}$, верно. Число 10 °C/км — известное значение сухоадиабатического градиента. Численный пример для слоя 2,0–2,6 км: частица с высоты 2,3 км, поднятая на 100 м, остывает на 1,0 °C, а окружающий воздух там холоднее на 2,2 °C; частица теплее, легче и уходит дальше вверх — неустойчиво.

Смысл: атмосфера устойчива, пока температура падает с высотой медленнее, чем в поднимающемся без теплообмена воздухе.

Ответ. 1) $\Delta T_a = -\dfrac{2\mu g}{7R}\,\Delta h \approx -10\,^\circ\text{C/км}\cdot\Delta h$; 2) устойчивые участки: 0–2,0 км, 2,6–7,2 км, выше 8,0 км (неустойчивы 2,0–2,6 и 7,2–8,0 км).