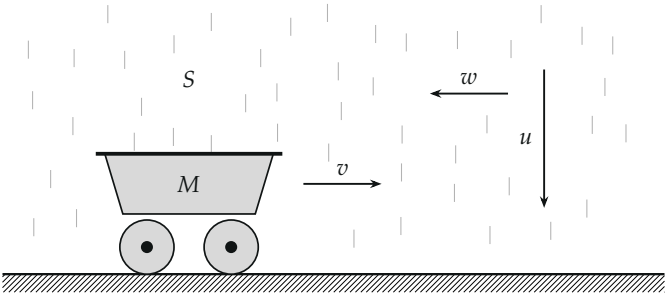
Таз на колёсиках

Задача 1. [МОШ 2020/21, 11 класс, задача 1] Тазик на колёсиках движется под дождём по горизонтальной дороге. Суммарная масса капель в единице объёма равна ρ, а их скорость вблизи поверхности земли равна u. Площадь верхнего горизонтального сечения тазика равна S. В нулевой момент ($t = 0$) таз пустой, его масса вместе с колёсами равна M, а скорость равна v_0 ($v_0 \ll u$). Далее везде силой трения качения и силой сопротивления воздуха можно пренебречь.



А. Пусть в дне таза есть небольшое отверстие. Дождевая вода, попадая в таз, стекает на дно, распределяется по нему тонким слоем и вытекает через отверстие. Можно считать, что масса воды в тазу пренебрежимо мала по сравнению с массой таза.

А1) Какое расстояние L_1 пройдёт таз до остановки, если капли падают вертикально?

А2) Подул встречный (для тазика) ветер, так что горизонтальная составляющая скорости капель вблизи земли оказалась равна w, а вертикальная — равна u. Какое расстояние L_2 пройдет тазик до остановки, если время движения равно t?

В. В этой части задачи считается, что дырок в тазике нет, вся попадающая в таз дождевая вода остаётся в нём. За рассматриваемое время вода не заполняет таз целиком и не переливается через борт. Ветра нет, скорость капель вертикальна.

В1) Определите зависимость скорости таза от времени $v(t)$ в этом случае.

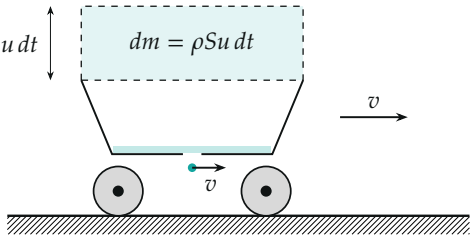
B2) Если таз проходит расстояние S к моменту, когда масса воды в нём становится равна массе таза M, то какое расстояние он пройдёт к моменту, когда масса воды в нём станет равна $3M$?

▲ **Решение. Что происходит.** Горизонтальных внешних сил нет: трения качения и сопротивления воздуха не учитываем, а сила тяжести и реакция дороги вертикальны. Значит, горизонтальный импульс сохраняется у любой системы, из которой ничего не уходит и в которую ничего не приходит. Дождь приносит массу, у которой горизонтальной скорости нет (при ветре есть, $-w$), и таз вынужден разгонять её до своей скорости, отдавая ей часть импульса. Это задача о теле переменной массы: пишем сохранение горизонтального импульса за малое dt и суммируем.

Обозначения. Ось x направим по движению таза (вправо на рисунке); скорости, как и везде, — проекции на эту ось со знаком. $v(t)$ — скорость таза, x — пройденный путь. Масса воды, которая за малое время dt попадает в таз, равна dm. Введём ещё $\tau = \dfrac{M}{\rho u S}$ — время, за которое на таз упала бы вода массой M.

1. Сколько воды падает на таз. Верхнее сечение таза горизонтально, поэтому за время dt в него попадают капли из слоя высотой $u\,dt$ над отверстием таза (рис. ниже). Масса этого слоя не зависит от скорости таза, ведь определяет её только вертикальная составляющая скорости капель:

$$dm = \rho S u\,dt.$$



Слой дождя, который за время dt окажется в тазу, и капля, вытекающая через отверстие со скоростью таза.

2. Закон сохранения импульса за время dt (А1). Возьмём систему: таз вместе с водой в нём и порция воды dm, которая за dt окажется в

тазу. Внешних горизонтальных сил нет, поэтому горизонтальный импульс системы за dt не меняется. В начале порция dm имеет горизонтальную скорость, равную нулю. В конце вода ушла через отверстие и унесла такую же массу dm со скоростью таза, а таз с остающейся в нём водой (масса $m_в \ll M$, её отбросим) движется со скоростью $v + dv$:

$$Mv + dm \cdot 0 = M(v + dv) + dm \cdot v \quad \Rightarrow \quad M\,dv = -\,dm\,v = -\rho u S\,v\,dt.$$

Таз разгоняет каплю до v, и она уносит импульс $dm\,v$.

3. Качественная картина. Таз теряет скорость, но чем она меньше, тем меньше импульса уносит каждая порция воды, значит, тем слабее торможение. Скорость убывает всё медленнее и стремится к нулю: решение уравнения $M\,dv/dt = -\rho u S\,v$ — экспонента $v = v_0 e^{-t/\tau}$ (рис. ниже, слева). Остановка наступает лишь через бесконечное время, но пройденный путь конечен — это площадь под кривой.

4. Путь до остановки (А1). Учтём, что $v\,dt = dx$, и перепишем уравнение пункта 2 в виде $M\,dv = -\rho u S\,dx$. Просуммируем по всему движению — от начала до остановки: скорость меняется от v_0 до 0, а координата — от 0 до L_1:

$$M(0 - v_0) = -\rho u S\,L_1 \quad \Rightarrow \quad L_1 = \frac{Mv_0}{\rho u S} = v_0\tau.$$

5. Встречный ветер (А2). Теперь у капель есть горизонтальная скорость $-w$: они летят навстречу тазу, и каждая порция dm приносит импульс $-w\,dm$. Расход массы остаётся прежним, $dm = \rho u S\,dt$ (определяется вертикальной составляющей u). Уравнение сохранения импульса пункта 2 принимает вид

$$Mv + dm \cdot (-w) = M(v + dv) + dm \cdot v,$$
$$M\,dv = -\,dm\,(v + w) = -\rho u S\,(v + w)\,dt.$$

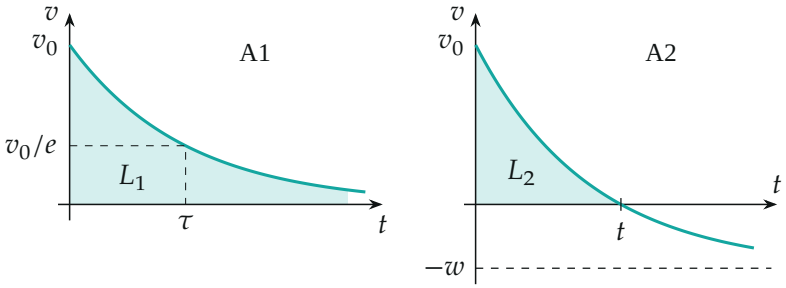
Торможение таза определяется скоростью $v + w$ — скоростью таза относительно воздуха. Когда v дойдёт до нуля, величина $v + w$ ещё положительна, и ветер продолжит тормозить таз: он остановится на мгновение

и поедет назад, а v стремится к $-w$. «Остановка» — этот момент; время до него и есть время движения t.

Просуммируем с учётом $v\,dt = dx$ от начала ($v = v_0$, $x = 0$) до остановки ($v = 0$, $x = L_2$, время t). Сумма $\sum (v + w)\,dt$ равна $L_2 + w\,t$:

$$M(0 - v_0) = -\rho u S\,(L_2 + wt) \quad \Rightarrow \quad L_2 = \frac{Mv_0}{\rho u S} - wt.$$

Обратите внимание: t — не любое время, а время до остановки, и оно определено задачей: из $v + w = (v_0 + w)e^{-t/\tau}$ при $v = 0$ получаем $t = \tau \ln\left(1 + \dfrac{v_0}{w}\right)$ (рис. ниже, справа).



Слева (A1): скорость затухает экспоненциально, путь L_1 — площадь под кривой. Справа (A2): скорость стремится к $-w$ и в момент t проходит через нуль; L_2 — площадь над осью до этого момента.

6. Часть B: вода остаётся в тазу. Теперь система — таз вместе со всей водой, которая в нём накопилась. Вода приходит с горизонтальной скоростью, равной нулю, и никуда не уходит: внешних горизонтальных сил нет, горизонтальный импульс системы постоянен и равен начальному Mv_0. Масса воды растёт равномерно: $m(t) = \rho u S\,t$. Поэтому

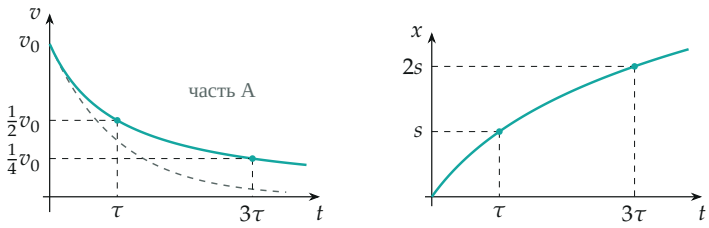
$$(M + \rho u S\,t)\,v = Mv_0 \quad \Rightarrow \quad v(t) = \frac{Mv_0}{M + \rho u S\,t} = \frac{v_0}{1 + t/\tau}.$$

7. Путь в части B. Путь за время t — сумма $v\,dt$ от начала до t:

$$x(t) = \int_0^t \frac{v_0\,dt'}{1 + t'/\tau} = v_0\tau \ln\left(1 + \frac{t}{\tau}\right).$$

Вода массой M накопится за время $t_1 = \tau$ (из $\rho u S\, t_1 = M$); вода массой $3M$ — за время $t_2 = 3\tau$. По условию путь до первого момента равен S; чтобы не путать с площадью сечения, обозначим его s:

$$s = v_0\tau\ln 2, \qquad x(t_2) = v_0\tau\ln 4 = 2\,v_0\tau\ln 2 = 2s.$$



Часть B: скорость падает как $1/(1+t/\tau)$ (серым — экспонента из части A), путь растёт как логарифм; отмечены моменты $m = M$ и $m = 3M$.

Проверка. Размерность: $\dfrac{[M][v_0]}{[\rho][u][S]} = \dfrac{\text{кг}\cdot\text{м/с}}{(\text{кг/м}^3)\,(\text{м/с})\,\text{м}^2} = \text{м}$. При $w \to 0$ получаем $wt = w\tau\ln(1+v_0/w) \to 0$ и $L_2 \to L_1$. Второй способ для A2 — система отсчёта, в которой воздух неподвижен по горизонтали: там это задача A1 с начальной скоростью $v_0 + w$, а остановка таза относительно дороги значит $v + w = w$. До этого момента таз проходит относительно воздуха $(v_0+w)\tau(1-\frac{w}{v_0+w}) = v_0\tau$, а дорога за то же время уезжает на wt, откуда снова $L_2 = v_0\tau - wt$.

Физический смысл. В части A вода уходит из таза и уносит импульс, поэтому скорость затухает экспоненциально, и путь конечен. В части B вода остаётся, и импульс сохраняется целиком: скорость падает медленнее (как $1/t$), и таз уезжает сколь угодно далеко. Каждое удвоение полной массы $M + m$ добавляет один и тот же путь s.

Ответ. A1) $L_1 = \dfrac{Mv_0}{\rho u S}$; A2) $L_2 = \dfrac{Mv_0}{\rho u S} - wt$; B1) $v(t) = \dfrac{Mv_0}{M + \rho u S\, t}$; B2) $2S$.