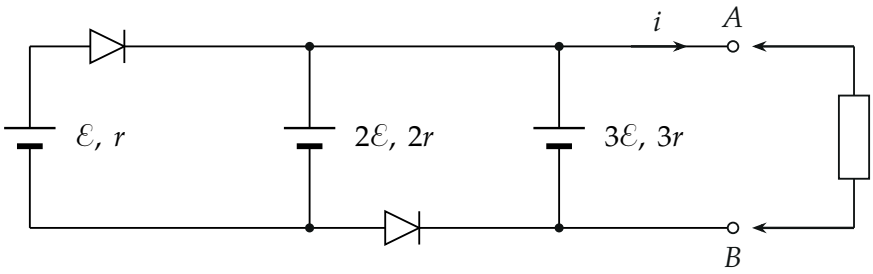
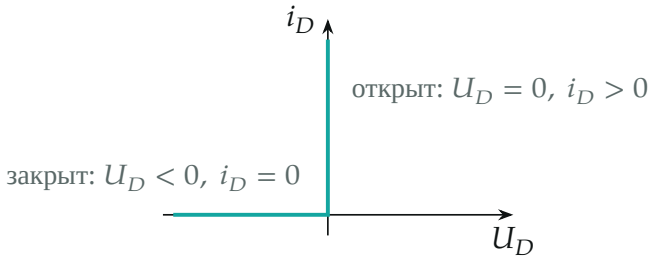
Изобразите характеристику

Задача 2. [МОШ 2020/21, 11 класс, задача 2] В схеме специального источника напряжения, показанной на рисунке, диоды — идеальные (открываются при близком к нулю напряжении), значения ЭДС и внутреннего сопротивления равны: $\mathcal{E} = 1{,}5$ В и $r = 1{,}0$ Ом соответственно.



Изобразите графически зависимость $i(U)$ (ВАХ источника), где i — ток, возникающий при подключении к источнику нагрузки, а U — разность потенциалов выводов A и B: $U = \varphi_A - \varphi_B$.

▲ **Решение. Что происходит.** В схеме три батарейки и два диода, и нужна ВАХ всего источника: как зависит напряжение U на выводах от тока i во внешней цепи. Диоды не позволяют сразу «сложить» батарейки: каждый диод то пускает ток, то нет, и от этого меняется сама схема. Значит, задача на диоды, а у любой задачи на диоды один приём — *предположение*: допускаем, в каком состоянии находится каждый диод, рисуем для этого состояния обычную цепь и считаем её, а потом проверяем, не противоречит ли ответ допущению. Проверка простая и у каждого диода своя (рисунок ниже): открытый диод обязан пропускать ток в прямом направлении ($i_D > 0$) и при этом иметь нулевое напряжение; закрытый обязан иметь отрицательное напряжение ($U_D = \varphi_{\text{анода}} - \varphi_{\text{катода}} < 0$) и нулевой ток. Не выполнено хоть что-то одно — предположение неверно, берём другое. Верное найдётся всегда: у схемы с диодами обязательно есть хоть одно допустимое состояние.



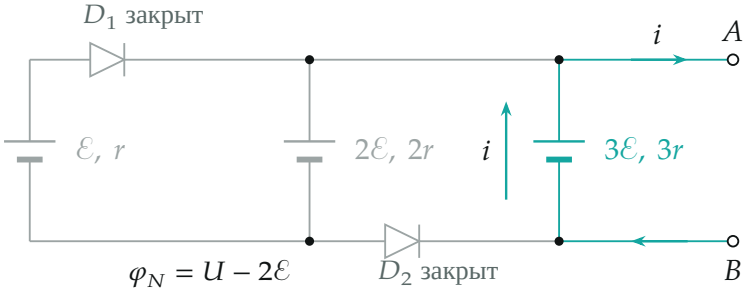
ВАХ идеального диода: либо ток нулевой при отрицательном напряжении, либо напряжение нулевое при положительном токе.

Обозначения. Потенциал вывода B примем за нуль, тогда $\varphi_A = U$. Нижний узел левых батарей (низ батарей $\mathcal{E}$ и $2\mathcal{E}$) назовём N, диод в верхней ветке — D_1, диод в нижней ветке между N и B — D_2. Положительный полюс каждой батарейки — верхний (длинная пластина). Стрелка диода на схеме смотрит вправо, туда он и пропускает ток. Неизвестную величину возьмём такую, которую задаёт нагрузка, — ток i, а напряжение U будем из него находить.

1. Первое предположение: оба диода закрыты. Начинаем с него, потому что оно самое простое: закрытые диоды рвут цепи, и схема почти распадается. Тока через D_1 и D_2 нет. Тогда у левой батарейки $\mathcal{E}$ нет замкнутой цепи, и у батарейки $2\mathcal{E}$ тоже: единственный путь её тока вниз шёл бы через D_2. Остаётся одна работающая батарейка $3\mathcal{E},\ 3r$, и весь ток нагрузки идёт через неё:

$$U = 3\mathcal{E} - 3r\,i. \qquad (1)$$

Почему так, а не $U = 3\mathcal{E} + 3ri$? Внутри батарейки ток идёт от минуса к плюсу, а часть напряжения $3ri$ теряется на её внутреннем сопротивлении, поэтому на выводах напряжение меньше ЭДС.



2. Проверяем первое предположение. Потенциалы узлов найдём шагами от провода B и от верхнего провода. В батарейках $\mathcal{E}$ и $2\mathcal{E}$ тока нет, поэтому падения на их сопротивлениях нулевые, и разность потенциалов на каждой равна ЭДС. Верхний провод имеет потенциал U, значит минус батарейки $2\mathcal{E}$ — узел N — имеет

$$\varphi_N = U - 2\mathcal{E} = 3\mathcal{E} - 3ri - 2\mathcal{E} = \mathcal{E} - 3ri.$$

Теперь напряжение на диодах — от анода к катоду.

Диод D_2: анод N, катод B, значит $U_{D_2} = \varphi_N - 0 = \mathcal{E} - 3ri$. Он закрыт, если $U_{D_2} < 0$, то есть

$$i > \frac{\mathcal{E}}{3r} = 0{,}5 \text{ А}.$$

Смысл ясен: пока ток нагрузки велик, батарейка $3\mathcal{E}$, $3r$ проседает, U и φ_N малы, и D_2 заперт.

Диод D_1: анод — плюс левой батарейки с потенциалом $\varphi_N + \mathcal{E}$, катод — верхний провод с потенциалом U. Тогда

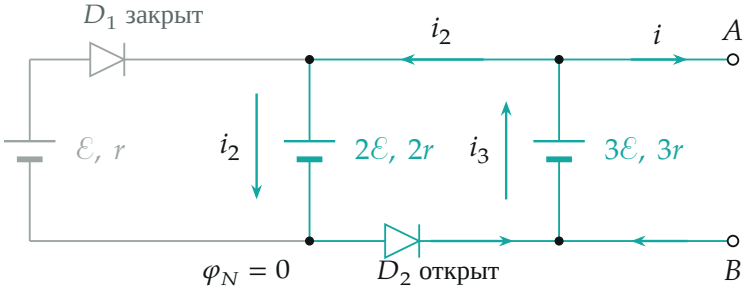
$$U_{D_1} = \varphi_N + \mathcal{E} - U = (U - 2\mathcal{E}) + \mathcal{E} - U = -\mathcal{E} < 0.$$

Этот диод закрыт *при любом* токе: в результат не вошло ни i, ни U. Значит, левая батарейка $\mathcal{E}$ и диод D_1 в работе не участвуют никогда — ни в одном из состояний, ни на каком участке ВАХ. (Полезно понять и без формул, почему: ветка «$\mathcal{E}$ + D_1» и батарейка $2\mathcal{E}$ включены между одними и теми же узлами одной полярностью, а $2\mathcal{E}$ сильнее, так что она «перетягивает» узел N, и на D_1 всегда остаётся запирающее напряжение

$\mathcal{E}$.)

Итог: при $i > \mathcal{E}/(3r) = 0{,}5$ А предположение верно, и ВАХ задаётся формулой (1). В координатах U, i это прямая от точки $(0;\ 1{,}5\ \text{А})$ (короткое замыкание, $U = 0$, $i = \mathcal{E}/r$) до точки, где $i = 0{,}5$ А: подставляя в (1), получаем $U = 3\mathcal{E} - 3r \cdot \dfrac{\mathcal{E}}{3r} = 2\mathcal{E} = 3$ В.

3. Что будет при меньшем токе: открывается D_2. Нарушено условие только для D_2 (D_1 закрыт всегда). Значит, при $i < \mathcal{E}/(3r)$ диод D_2 открывается, и предполагаем новое состояние: D_2 открыт, D_1 закрыт. Открытый диод — просто провод: $\varphi_N = \varphi_B = 0$. Теперь узел N соединён с нижним проводом, и верхний провод с потенциалом U связан с ним через батарейку $2\mathcal{E},\ 2r$. Через неё пойдёт ток i_2, и в какую сторону — узнаем из знака, поэтому направим его вниз (сверху через батарейку к N и вниз через D_2, а диод пускает ток только так). Батарейка $3\mathcal{E},\ 3r$ отдаёт ток i_3, который делится: часть i уходит в нагрузку, часть i_2 — в батарейку $2\mathcal{E}$. Токи складываются: $i_3 = i + i_2$.



Запишем напряжение между верхним проводом и нулём двумя способами. Для батарейки $3\mathcal{E},\ 3r$ (как в пункте 1, но ток теперь i_3) и для батарейки $2\mathcal{E},\ 2r$, через которую ток идёт от плюса к минусу, то есть она *заряжается*, и напряжение на ней больше ЭДС на $2ri_2$:

$$U = 3\mathcal{E} - 3r\,i_3, \qquad U = 2\mathcal{E} + 2r\,i_2.$$

Подставим $i_3 = i + i_2$ и выразим i_2 из второго уравнения, $i_2 = \dfrac{U - 2\mathcal{E}}{2r}$:

$$U = 3\mathcal{E} - 3ri - 3r \cdot \frac{U - 2\mathcal{E}}{2r} \;\Rightarrow\; \frac{5}{2}U = 6\mathcal{E} - 3ri,$$

$$U = \frac{12}{5}\mathcal{E} - \frac{6}{5}ri = 3{,}6\text{ В} - 1{,}2\text{ Ом}\cdot i. \qquad (2)$$

4. Проверяем второе предположение. Требуется: ток через открытый D_2 положителен, и D_1 закрыт.

Ток i_2 — это и есть ток через D_2 (через него идёт только ток батарейки $2\mathcal{E}$), и он положителен, если $U > 2\mathcal{E}$. По (2) это значит $\dfrac{12}{5}\mathcal{E} - \dfrac{6}{5}ri > 2\mathcal{E}$, то есть $i < \dfrac{\mathcal{E}}{3r} = 0{,}5$ А — ровно то, при чём мы и перешли ко второму предположению. Значит, на всём промежутке $0 \leqslant i < 0{,}5$ А это состояние допустимо.

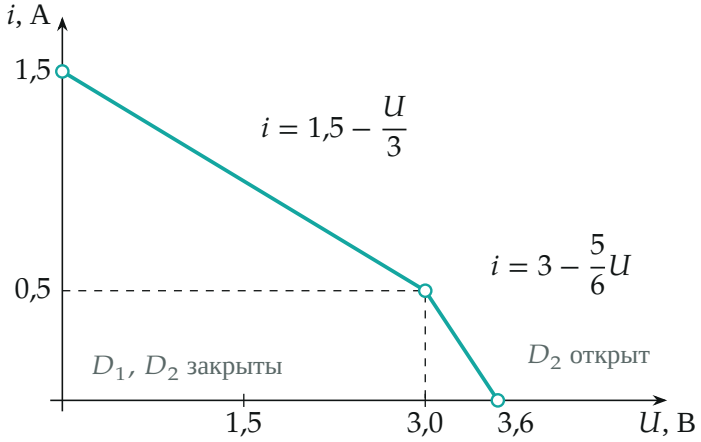
Для D_1: теперь $\varphi_N = 0$, плюс левой батарейки имеет потенциал $\mathcal{E}$, и $U_{D_1} = \mathcal{E} - U < 0$, так как $U > 2\mathcal{E} > \mathcal{E}$. Закрыт, как и раньше.

Оба состояния стыкуются: при $i = 0{,}5$ А и там и там $U = 3$ В ($i_2 = 0$ — D_2 только-только открывается). При $i = 0$ из (2) $U = 3{,}6$ В: это наибольшее напряжение, которое источник может создать на выводах (холостой ход). Отрицательные токи не рассматриваем: источник отдаёт ток в нагрузку, $i \geqslant 0$ по смыслу вопроса.

5. Строим график. В координатах U, i получаются два отрезка, из формул (1) и (2) переписанных относительно i: $i = 1{,}5 - \dfrac{U}{3}$ на участке $0 \leqslant U \leqslant 3$ В и $i = 3 - \dfrac{5}{6}U$ на участке $3 \leqslant U \leqslant 3{,}6$ В. Значения тока в точках излома:

U, В	0	3,0	3,6
i, А	1,5	0,5	0

Излом один — там, где диод D_2 меняет состояние. Второй участок круче: после открытия D_2 к батарейке $3\mathcal{E}$, $3r$ подключается ещё одна, и её присутствие «съедает» часть тока.



ВАХ источника: излом при $U = 3{,}0$ В — там открывается D_2.

Проверка. Размерность: $\mathcal{E}/r = \text{В}/\text{Ом} = \text{А}$, верно. Предел $U = 0$ (короткое замыкание): ток $3\mathcal{E}/3r = \mathcal{E}/r = 1{,}5$ А — закрытые диоды отрезали остальные батарейки. Второй способ для второго участка: формула (2) имеет вид ВАХ одной батарейки с ЭДС $2{,}4\,\mathcal{E} = 3{,}6$ В и внутренним сопротивлением 1,2 Ом; это ЭДС и сопротивление двух батареек $2\mathcal{E}$, $2r$ и $3\mathcal{E}$, $3r$, соединённых параллельно: $U_0 = \dfrac{\frac{2\mathcal{E}}{2r} + \frac{3\mathcal{E}}{3r}}{\frac{1}{2r} + \frac{1}{3r}} = \dfrac{12}{5}\,\mathcal{E}$, $R_0 = \dfrac{6r}{5}$. Так же можно решать графически: нарисовать ВАХ каждой батарейки с резистором и ВАХ диода и сложить их по правилам последовательного и параллельного соединения; получится та же ломаная. Энергетический баланс при $U = 3{,}6$ В: $i_3 = i_2 = 0{,}3$ А, батарейка $3\mathcal{E}$ отдаёт $4{,}5 \cdot 0{,}3 = 1{,}35$ Вт, и ровно столько же уходит на зарядку $2\mathcal{E}$ ($3 \cdot 0{,}3 = 0{,}9$ Вт) и тепло в сопротивлениях ($3 \cdot 0{,}09 + 2 \cdot 0{,}09 = 0{,}45$ Вт).

Физический смысл. Источник с диодами ведёт себя как две разные батарейки: при больших токах — как $3\mathcal{E}$, $3r$, а при малых к ней подключается батарейка $2\mathcal{E}$ — не как помощник, а как приёмник: она отбирает часть тока, и ВАХ круче опускается.

Ответ. График $i(U)$ — ломаная с одним изломом: из точки $(0;\ 1{,}5\ \text{А})$ в точку $(3{,}0\ \text{В};\ 0{,}5\ \text{А})$, затем в точку $(3{,}6\ \text{В};\ 0)$. Аналитически: $i = 1{,}5 - U/3$ при $0 \leqslant U \leqslant 3$ В и $i = 3 - 5U/6$ при $3 \leqslant U \leqslant 3{,}6$ В.