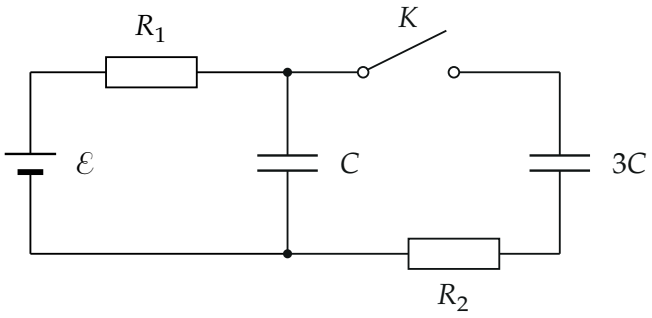
Токи через секунду

Задача 3. [МОШ 2020/21, 11 класс, задача 3] В схеме, показанной на рисунке, ключ K изначально разомкнут, конденсатор ёмкостью $C = 100$ мкФ заряжен, а конденсатор ёмкостью $3C$ не заряжен, ток в цепи равен нулю. Другие параметры схемы равны: $R_1 = 10$ МОм, $R_2 = 10$ Ом, $\mathcal{E} = 12$ В. Внутренним сопротивлением источника и сопротивлением проводов можно пренебречь.



Ключ замыкают. Определите токи i_1 и i_2, текущие через резисторы R_1 и R_2 соответственно, через одну секунду после замыкания ключа.

▲ **Решение. Что происходит.** Пока ключ разомкнут, в левой части цепи ток течь не может, и конденсатор C заряжен до ЭДС. После замыкания начинается перезарядка: между конденсаторами и через батарею потекут токи, и всё это в итоге придёт к новому установившемуся состоянию. Но спрашивают не про конечное состояние, а про токи через ровно одну секунду. Значит, нужно понять, *успеет* ли за секунду всё установиться, то есть сравнить секунду с характерными временами цепи. Это задача на переходные процессы в цепи RC с двумя сильно различающимися временами, и решается она разделением на быструю и медленную стадии.

Обозначения. q_0 — начальный заряд верхней обкладки конденсатора C, U — напряжение на конденсаторе C, i_C — ток, заряжающий C.

1. До замыкания. Ключ разомкнут, ток в цепи равен нулю, поэтому на R_1 напряжения нет, и конденсатор C заряжен до ЭДС:

$$U_0 = \mathcal{E} = 12\ \text{В}, \qquad q_0 = C\mathcal{E} = 1{,}2 \cdot 10^{-3}\ \text{Кл}.$$

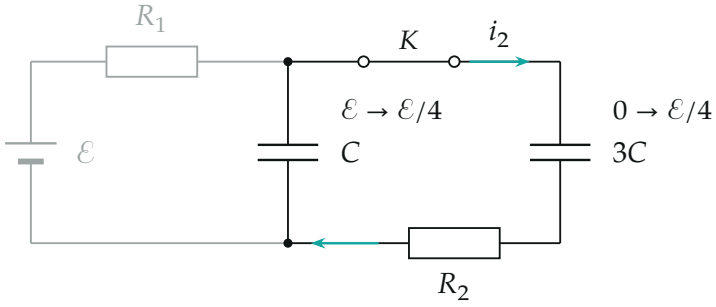
Конденсатор $3C$ не заряжен.

2. Два характерных времени — зачем они нужны. Характерным называют время, за которое переходный процесс почти заканчивается. Для конденсатора C, разряжающегося через резистор R, оно порядка RC: чем больше сопротивление и ёмкость, тем медленнее перезаряд. (Для катушки с сопротивлением R то же самое даёт L/R.) У нас два контура, и достаточно оценки по порядку величины:

$$\tau_1 \sim R_1 C = 10^7 \cdot 10^{-4}\ \text{с} = 10^3\ \text{с}, \qquad \tau_2 \sim R_2 C = 10 \cdot 10^{-4}\ \text{с} = 10^{-3}\ \text{с}.$$

(Точные значения с учётом того, что конденсаторы работают вместе, — 4000 с и 0,75 мс — ничего в выводе не меняют, они в проверке в конце.) Итак, $\tau_2 \ll 1\ \text{с} \ll \tau_1$. Вывод: быстрый контур — конденсаторы и маленькое R_2 — успевает полностью перезарядиться за тысячную долю секунды, а медленный — через R_1 — за секунду едва шелохнулся. Поэтому процесс естественно делится на две стадии: сначала быстро перезаряжаются C и $3C$, и всё это время через R_1 ничего существенного не течёт; потом, уже очень медленно, батарея через R_1 их дозаряжает.

3. Быстрая стадия: сохранение заряда. За время порядка $\tau_2 \sim 10^{-3}$ с через R_1 успевает пройти заряд не больше $\dfrac{\mathcal{E}}{R_1} \cdot 10^{-3}\ \text{с} \approx 10^{-9}$ Кл — в миллион раз меньше q_0. Значит, верхние обкладки C и $3C$ вместе с проводом между ними — практически изолированная система, и её суммарный заряд сохраняется. Рисунок ниже: батарея с R_1 почти не участвует (серая), всё происходит в контуре с R_2.



Быстрая стадия: батарея с R_1 (серым) почти не участвует, конденсаторы C и $3C$ выравнивают напряжение через R_2.

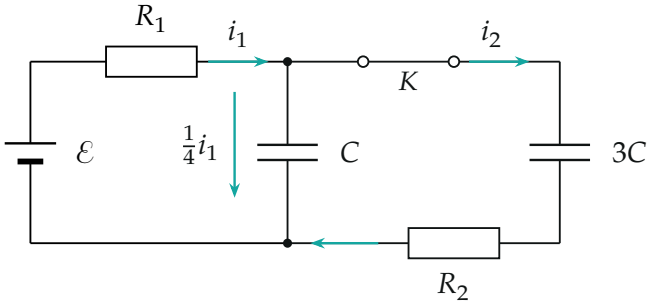
Когда ток через R_2 прекратится, напряжение на нём станет нулевым (падение $iR_2 = 0$), и на обоих конденсаторах напряжение будет одинаковым, U_1. Закон сохранения заряда для верхних обкладок: сначала заряд только на C, потом на C и на $3C$:

$$q_0 = CU_1 + 3CU_1 \quad \Rightarrow \quad U_1 = \frac{\mathcal{E}}{4} = 3\text{ В}.$$

Заряды стали $CU_1 = 0{,}3$ мКл на C и $3CU_1 = 0{,}9$ мКл на $3C$: конденсатор C отдал $3/4$ заряда конденсатору $3C$. Это произошло примерно за 10^{-3} с — совсем в начале отсчёта, дальше секунда идёт уже на медленной стадии.

4. Медленная стадия: что течёт через R_1. Теперь на R_1 падает напряжение $\mathcal{E} - U_1 = \frac{3}{4}\mathcal{E} = 9$ В, и через него идёт ток i_1. **Обратите внимание:** быстрая стадия «разрядила» C с 12 В до 3 В, и именно поэтому ток i_1 определяется разностью 9 В, а не исходным нулём и не 12 В. Этот ток очень мал, а время — одна секунда, на тысячу раз меньше τ_1, поэтому за секунду через R_1 протекает малый заряд $\Delta q = i_1 \Delta t$, $\Delta t = 1$ с, и состояние контура сильно измениться не может.

5. Куда идёт малый заряд. Малый заряд Δq, пришедший через R_1, распределится по двум конденсаторам: на C придёт $(i_1 - i_2)\Delta t$, на $3C$ — $i_2 \Delta t$, ведь через R_2 идёт именно ток зарядки $3C$.



Медленная стадия: ток i_1 делится между C и $3C$ в отношении $1:3$.

Напряжения теперь немного отличаются от $\mathcal{E}/4$. Запишем разность потенциалов между верхним узлом A и нижним проводом B двумя способами.

Внутри конденсаторной части. Конденсатор C и ветвь «$3C$ плюс R_2» подключены к одним и тем же точкам A и B, поэтому напряжение на них одинаково. На C оно выросло на $\dfrac{(i_1-i_2)\Delta t}{C}$ по сравнению с $\mathcal{E}/4$; на $3C$ выросло на $\dfrac{i_2\Delta t}{3C}$, и ещё на R_2 падает i_2R_2:

$$\varphi_A-\varphi_B=\frac{\mathcal{E}}{4}+\frac{(i_1-i_2)\Delta t}{C}=\frac{\mathcal{E}}{4}+\frac{i_2\Delta t}{3C}+i_2R_2.$$

Через батарею и R_1. Тот же перепад потенциалов равен ЭДС минус падение на R_1:

$$\varphi_A-\varphi_B=\mathcal{E}-i_1R_1.$$

Теперь сравниваем величины, как и надо в оценке. Обозначим $r=\Delta t/C=\dfrac{1\text{ с}}{10^{-4}\text{ Ф}}=10^4$ Ом — «сопротивление» секунды на ёмкость C. Тогда $r\ll R_1=10^7$ Ом, и $R_2=10$ Ом $\ll r$.

Из равенства двух частей первой формулы (убрав $\mathcal{E}/4$):

$$(i_1-i_2)\,r=\frac{i_2\,r}{3}+i_2R_2\;\Rightarrow\;(i_1-i_2)\,r\approx\frac{i_2\,r}{3}\;\Rightarrow\;i_2=\frac{3}{4}\,i_1,$$

потому что $R_2\ll r$ и слагаемым i_2R_2 можно пренебречь. Ток делится

между C и $3C$ как $1:3$ — пропорционально ёмкостям, потому что напряжения на них растут одинаково.

Приравнивая первую формулу и вторую:

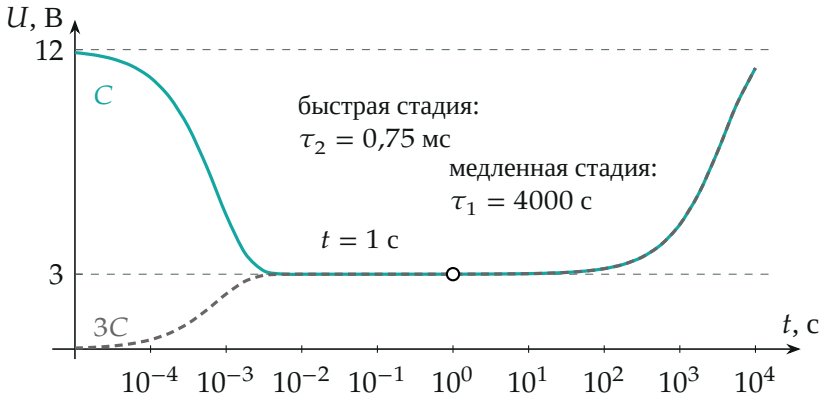
$$\frac{3\mathcal{E}}{4} = i_1 R_1 + (i_1 - i_2)\, r = i_1 R_1 + \frac{1}{4}\, i_1 r \approx i_1 R_1,$$

так как $r \ll R_1$ (добавка $\frac{1}{4}\, i_1 r$ в $4 \cdot 10^3$ раз меньше $i_1 R_1$). Поэтому

$$i_1 = \frac{3\mathcal{E}}{4R_1} = \frac{9\ \text{В}}{10\ \text{МОм}} = 0{,}9\ \text{мкА}, \qquad i_2 = \frac{3}{4}\, i_1 \approx 0{,}68\ \text{мкА}.$$

Смысл результата: за эту секунду батарея только начала дозарядку, и ток по-прежнему такой, каким он был сразу после быстрой стадии — 9 В на R_1.

6. Проверка по точному решению. Дозарядка идёт как $\mathcal{E} - U = \frac{3}{4}\mathcal{E}\, e^{-t/\tau_1}$ с $\tau_1 = R_1 \cdot 4C = 4000$ с, поэтому через секунду $i_1 = \frac{3\mathcal{E}}{4R_1} e^{-1/4000} = 0{,}8998$ мкА: поправка $e^{-1/4000} = 0{,}99975$ ничтожна. График напряжения по полной системе уравнений Кирхгофа — на рисунке (логарифмическая шкала времени).



Напряжения на конденсаторах (логарифмическая шкала времени, расчёт по полной системе уравнений): быстрая перезарядка до 3 В, затем медленный рост к 12 В.

Проверка. Размерность: $\mathcal{E}/R_1 = \text{В}/\text{Ом} = \text{А}$; $\Delta t/C = \text{с}/\Phi = \text{Ом}$. Решение полной системы уравнений Кирхгофа для обоих контуров (численно, без разделения стадий) даёт $i_1 = 0{,}8998$ мкА и $i_2 = 0{,}6748$ мкА — те же значения, отношение $i_2/i_1 = 0{,}7500$. Точные характерные времена: быстрого контура $\tau_2 = R_2 \cdot \dfrac{3}{4}C = 0{,}75$ мс (конденсаторы в нём соединены последовательно), медленного $\tau_1 = R_1 \cdot 4C = 4000$ с (заряжаются параллельно, как одна ёмкость $4C$); они не меняют оценки $\tau_2 \ll 1\text{ с} \ll \tau_1$. Заряд, прошедший через R_1 за секунду, около 0,9 мкКл — почти в 1300 раз меньше q_0: допущение «состояние за секунду меняется мало» оправдано.

Физический смысл. Через секунду переходный процесс — в самом начале медленной стадии: напряжение на конденсаторах уже установилось на уровне $\mathcal{E}/4$, а батарея только начинает их заряжать. Поэтому токи почти равны своим «начальным» значениям $\dfrac{3\mathcal{E}}{4R_1}$ и $\dfrac{3}{4}$ от них.

Ответ. $i_1 \approx 0{,}9$ мкА, $i_2 \approx 0{,}68$ мкА.