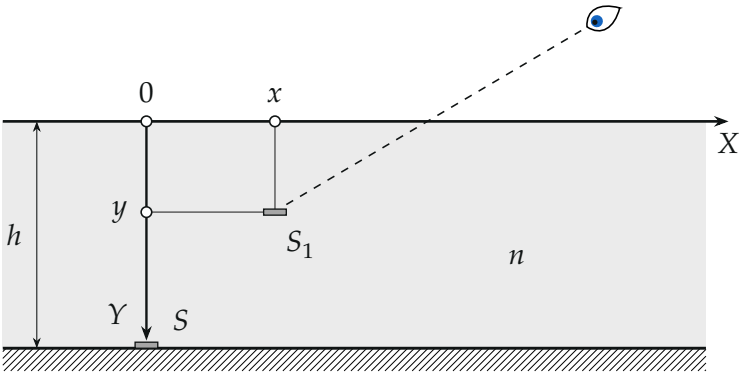
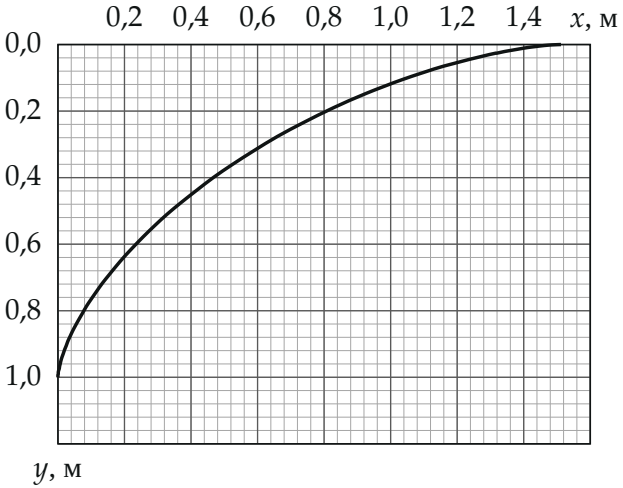
Рассматривая монеточку

Задача 4. [МОШ 2020/21, 11 класс, задача 4] На дне сосуда глубиной h, заполненного жидкостью с показателем преломления n, в точке с координатами $(0, h)$ (направление осей показано на рисунке) располагается монеточка S.



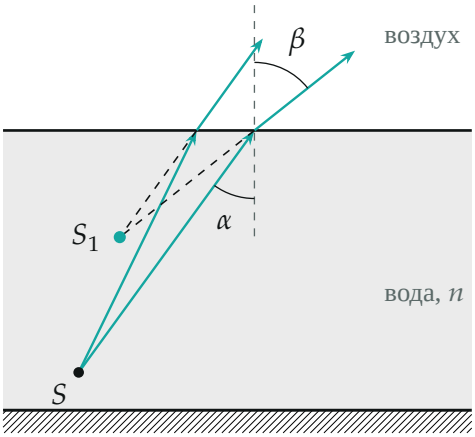
Наблюдатель видит изображение монеточки S_1 в точке с координатами (x, y). Множество значений (x, y) для разных углов зрения изображено на графике. Используя график, найдите показатель преломления жидкости n и глубину сосуда h.



▲ **Решение. Что происходит.** На графике — не одна монетка, а множество мест, где наблюдатель её видит при разных направлениях взгляда. Откуда оно берётся? Глаз ничего не знает о преломлении: он видит предмет там, где пересекаются *продолжения* лучей, попавших в зрачок, считая, что свет шёл по прямой. Один луч даёт лишь прямую, на которой лежит изображение; чтобы получилась точка, нужен второй. Зрачок узкий: в него входят два соседних луча, вышедших из S под чуть разными углами. Их продолжения почти параллельны и пересекаются в точке S_1 — это и есть изображение; при другом угле зрения точка сместится, и все такие точки лягут на кривую графика. Задача на геометрическую оптику (преломление на плоской границе), и два пути к ответу: через касательную к кривой и через две особые точки.

Обозначения. α — угол луча с вертикалью (нормалью) в воде, β — в воздухе, показатель преломления воздуха считаем равным единице: $\sin\beta = n\sin\alpha$. Луч из S выходит на поверхность в точке $X_0 = h\,\mathrm{tg}\,\alpha$. Оси — как на рисунке: X вдоль поверхности, Y вниз; монетка в точке $(0;\, h)$.

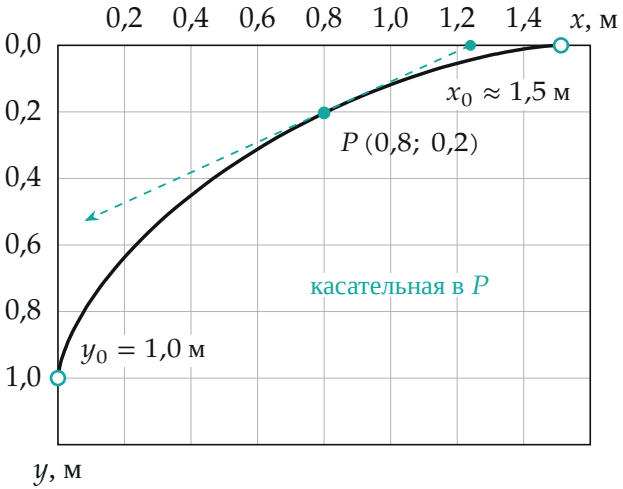
1. Почему продолжение луча касается кривой. Нарисуем два соседних луча (рисунок): сплошные — в воде и в воздухе, штриховые — продолжения преломлённых частей назад.



Два соседних луча от S и продолжения их преломлённых частей: они пересекаются в точке S_1 — там наблюдатель видит монету.

Продолжение каждого луча при смене угла лишь чуть-чуть поворачивается, а изображение — там, где соседние продолжения пересекаются. Значит, на кривой лежит точка пересечения продолжения данного луча с продолжением *бесконечно близкого* ему. Отсюда вывод: каждое такое продолжение *касается* кривой в своей точке. Почему именно касается, а не пересекает: если бы прямая пересекала кривую, на ней было бы две точки кривой, то есть два изображения, а наблюдатель видит одно. Значит, прямая касается кривой в одной точке. Это ключ к задаче: если провести касательную к графику, она окажется продолжением реального луча, идущего в глаз, и по ней можно найти угол β и точку X_0, где луч вышел из воды.

2. Касательная в удобной точке. Возьмём точку графика P с координатами $x = 0{,}8$ м, $y = 0{,}2$ м — она хорошо лежит на клетках — и проведём в ней касательную. Она пересекает ось X (то есть уровень поверхности воды) в точке $X_0 \approx 1{,}24$ м; клетку шкалы считаем по делениям (одна клетка — 0,04 м). Это продолжение луча, вышедшего из воды в точке X_0.



Особые точки кривой (светлые кружки) и касательная в точке P, продолжающая луч.

Найдём углы. Для луча в воздухе: от точки P до поверхности по горизонтали $X_0 - 0{,}8 = 0{,}44$ м, по вертикали 0,2 м, поэтому

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{1{,}24 - 0{,}8}{0{,}2} = 2{,}2, \qquad \sin\beta = \frac{\operatorname{tg}\beta}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\beta}} \approx 0{,}91.$$

Для луча в воде: он идёт от $S\,(0;\,h)$ к точке X_0 на поверхности, поэтому $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{X_0}{h}$, а $\sin\alpha = \dfrac{X_0}{\sqrt{X_0^2 + h^2}}$. Закон преломления $n\sin\alpha = \sin\beta$ даёт первое уравнение, связывающее n и h:

$$n \cdot \frac{1{,}24}{\sqrt{1{,}24^2 + h^2}} = 0{,}91. \tag{1}$$

Неизвестных два, нужно ещё одно уравнение. График даёт его без новых построений.

3. Вторая связь — точка на оси. Кривая начинается на оси Y при $y_0 = 1{,}0$ м: это изображение, которое видно строго сверху, вдоль вертикали. Найдём его через два *близких к вертикали* луча: один идёт ровно вертикально, другой — под малым углом α и выходит под малым углом $\beta = n\alpha$ (при малых углах $\sin \approx \operatorname{tg} \approx$ угол). Луч выходит в точке $X_0 \approx h\alpha$, а его продолжение составляет с вертикалью угол β и пересекает вертикаль на глубине

$$y_0 = \frac{X_0}{\operatorname{tg}\beta} \approx \frac{h\alpha}{n\alpha} = \frac{h}{n}.$$

Это знакомая «кажущаяся глубина»: предмет под водой кажется приподнятым в n раз. По графику $y_0 = 1{,}0$ м, значит

$$h = n \cdot 1{,}0 \text{ м}. \tag{2}$$

Истинная глубина в метрах — число, равное показателю преломления.

4. Решаем систему. Подставим $h = n \cdot 1$ м в (1), заменив $n = h$ (в

метрах): $\dfrac{h\cdot 1{,}24}{\sqrt{1{,}24^2+h^2}}=0{,}91$. Возводим в квадрат:

$$\frac{1{,}24^2\,h^2}{1{,}24^2+h^2}=0{,}91^2 \;\Rightarrow\; h^2\,(1{,}24^2-0{,}91^2)=0{,}91^2\cdot 1{,}24^2,$$

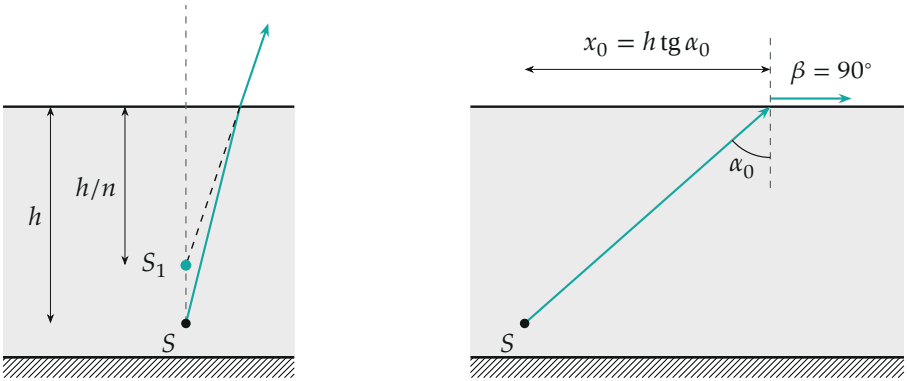
$$h^2\cdot 0{,}71=1{,}27,$$

откуда $h\approx 1{,}34$ м и $n=h/(1\text{ м})\approx 1{,}34$. Это похоже на воду ($n\approx 1{,}33$): ответ $n=1{,}33\pm 0{,}05$, $h=1{,}34\pm 0{,}05$ м — точность задана точностью чтения графика.

5. Второй способ: без касательных. Если касательные не пришли в голову, достаточно двух *особых точек* кривой. Первая — точка на оси Y, она уже есть: $h/n=1{,}0$ м. Вторая — конец кривой на поверхности воды ($y=0$). Почему она особая: изображение лежит на поверхности, только если продолжение луча идёт вдоль неё, то есть луч выходит в воздух горизонтально, $\beta=90^\circ$. Это самый «широкий» луч: под большим углом свет уже не выйдет (полное внутреннее отражение). Закон преломления даёт $n\sin\alpha_0=1$ — в воде луч идёт под предельным углом, а выходит в точке

$$x_0=h\operatorname{tg}\alpha_0=\frac{h}{\sqrt{n^2-1}},$$

потому что из $\sin\alpha_0=1/n$ следует $\operatorname{tg}\alpha_0=1/\sqrt{n^2-1}$.



Слева: лучи вдоль вертикали, $y_0=h/n$. Справа: луч, выходящий вдоль по-

верхности, $x_0 = h/\sqrt{n^2-1}$.

По графику $x_0 \approx 1{,}5$ м. Вместе с $h = n \cdot 1$ м:

$$\frac{n}{\sqrt{n^2-1}} = 1{,}5 \quad \Rightarrow \quad n^2 = 2{,}25\,(n^2-1) \quad \Rightarrow \quad n^2 = \frac{2{,}25}{1{,}25} = 1{,}8,$$

$n \approx 1{,}34$, $h \approx 1{,}34$ м. Те же числа, что и с касательной; два способа сошлись. (Читая график более аккуратно, $x_0 \approx 1{,}52$ м даёт $n \approx 1{,}33$ — как раз показатель воды.)

Обратите внимание. Формула h/n верна только для изображения на оси: при смене угла зрения точка S_1 *смещается по кривой*, а не по вертикали над монетой.

Проверка. Размерность: h/n и $h/\sqrt{n^2-1}$ — метры. Предел: при $n \to 1$ (преломления нет) $y_0 \to h$ — изображение остаётся на месте монеты, а $x_0 \to \infty$ — ограничения по углу зрения нет. Третий способ — полная кривая: соседние лучи пересекаются в точке

$$x = h\,(n^2-1)\,\mathrm{tg}^3\alpha, \qquad y = \frac{h\cos^3\beta}{n\cos^3\alpha}, \qquad 0 \leqslant \alpha \leqslant \alpha_0,$$

(условие пересечения $dx/d\alpha = 0$ при фиксированном y для продолжений $x = h\,\mathrm{tg}\,\alpha - y\,\mathrm{tg}\,\beta$). При $\alpha = 0$ получаем $(0;\, h/n)$, при $\alpha = \alpha_0$ — $(h/\sqrt{n^2-1};\, 0)$, а промежуточные точки совпадают с графиком: при $n = 4/3$, $h = 4/3$ м и $\alpha = 30°$ получаем $(0{,}20;\ 0{,}64)$ м, и именно здесь проходит кривая.

Физический смысл. Чем дальше от вертикали смотрит наблюдатель, тем выше поднимается кажущееся изображение и тем дальше оно уходит в сторону от монеты: на оси оно на глубине h/n, а при почти скользящем взгляде лежит у самой поверхности на расстоянии $h/\sqrt{n^2-1}$ от оси.

Ответ. $n = 1{,}33 \pm 0{,}05$, $h = 1{,}34 \pm 0{,}05$ м.