О капле

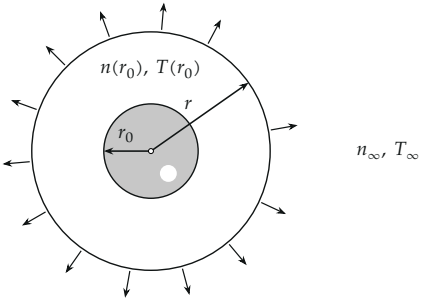
Задача 5. [МОШ 2020/21, 11 класс, задача 5] В этой задаче рассматривается эффект уменьшения температуры капли воды вследствие испарения с её поверхности при близких к комнатным давлении и температуре.

В одном из экспериментов шарообразная капля воды радиусом порядка миллиметра удерживалась силами поверхностного натяжения на тонкой полимерной леске. Зависимость температуры капли от времени измерялась с помощью высокоточного инфракрасного тепловизора. Вдали от капли (на «бесконечности») поддерживались постоянные значения: температуры T_∞, давления p_∞ и относительной влажности воздуха φ_∞. Обнаружилось, что если в начальный момент температура капли была равна температуре на бесконечности T_∞, то затем в течение короткого времени она уменьшалась до значения $T_\infty - \Delta T$ (ΔT порядка нескольких градусов) и далее длительное время оставалась постоянной. Предлагается определить величину разности температур ΔT, учитывая диффузию пара от капли на бесконечность и тепловой поток, обусловленный разностью температур капли и воздуха на бесконечности. Конвекцией и передачей тепла по леске предлагается пренебречь.

В стационарном режиме в пространстве вне капли устанавливается распределение концентрации пара $n(r)$ и температуры $T(r)$. В силу сферической симметрии концентрация и температура зависят только от расстояния до центра капли r и удовлетворяют уравнениям:

$$\frac{dN}{dt} = -D \cdot 4\pi r^2 \frac{dn}{dr}, \qquad \frac{dQ}{dt} = -\kappa \cdot 4\pi r^2 \frac{dT}{dr}.$$

где dN — количество молекул пара, проходящих за время dt через поверхность сферы радиусом r, концентрической с каплей, dQ — количество тепла, переносимого за время dt через поверхность той же сферы; коэффициенты диффузии и теплопроводности D и κ можно считать постоянными. Маленькими стрелками на рисунке символически показан поток диффундирующих молекул пара.



А. Коэффициенты диффузии и теплопроводности D и κ, молярная масса μ_{H_2O}, удельная теплота испарения воды L и радиус капли r_0 считаются известными. Изменение радиуса капли вследствие испарения можно считать незначительным.

А1) Температура у поверхности капли $T(r_0)$ и температура на бесконечности T_∞ (см. рис.) известны. Определите тепловой поток $\dfrac{dQ}{dt}$ и распределение температуры $T(r)$.

А2) Известны концентрации пара: $n(r_0)$ и n_∞, определите массу воды, испаряющейся с поверхности капли за малое время t.

А3) Используя результаты пунктов А1) и А2), выразите разность плотностей пара у капли и на бесконечности $\Delta\rho = \rho(r_0) - \rho_\infty$ через разность температур $\Delta T = T_\infty - T(r_0)$.

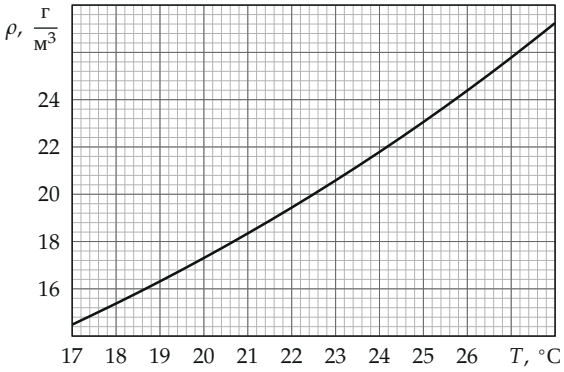
В. Отношение коэффициентов теплопроводности и диффузии в условиях задачи удовлетворяет соотношению:

$$\frac{\kappa}{D} = \frac{v_в}{v_{H_2O}} \cdot \frac{c_V \rho_в}{\mu_в},$$

где v_{H_2O} и $v_в$ — среднеквадратичные скорости молекул воды и воздуха, $c_V = 2{,}5R$ — молярная теплоёмкость воздуха при постоянном объёме, $\rho_в$ — плотность воздуха. Определите отношение коэффициентов при температуре 300 К. При расчёте плотности давление воздуха можно считать равным 10^5 Па. Универсальная газовая постоянная равна $R = 8{,}3$ Дж/(моль·К), молярные массы воды и воздуха: $\mu_{H_2O} = 18$ г/моль и $\mu_в = 29$ г/моль соответственно. Убедитесь в том, что при изменении температуры на 10 К отношение коэффициентов меняется незначитель-

но.

C. Используя график зависимости плотности насыщенного пара воды от температуры, приведённый на рисунке ниже, а также результаты, полученные в частях A и B, определите как можно точнее величину разности температур ΔT, для следующих значений параметров на бесконечности: $T_\infty = 27\,^\circ\text{C}$, $\varphi_\infty = 70\,\%$. Удельная теплота испарения воды и давление воздуха равны: $L = 2{,}4 \cdot 10^6$ Дж/кг и $p_0 = 10^5$ Па соответственно.



Примечание. При выполнении заданий части A может оказаться полезной формула:

$$\int_a^\infty \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{a}.$$

▲ **Решение. Что происходит.** Начнём с картины. Вдали от капли температура T_∞, а сама капля остыла до $T_0 < T_\infty$ (по условию она быстро охладилась и дальше не меняется). Раз температура у капли ниже, чем вдали, к ней течёт тепло из воздуха, то есть есть тепловой поток к капле. Одновременно с поверхности капли уходят молекулы пара: идёт испарение, и поток пара направлен от капли. Испаряясь, молекулы уносят энергию; температура капли застывает, когда приходящее тепло в точности равно уходящему на испарение — это условие и даст ΔT.

Оба уравнения решаются одной идеей: в стационарном режиме ничто не копится и не пропадает по пути, поэтому сколько тепла (и молекул)

за секунду прошло через малую сферу вокруг капли, столько же пройдёт и через любую большую. Значит, потоки не зависят от r, $r^2\,dT/dr$ и $r^2\,dn/dr$ постоянны, а оба уравнения решаются одинаково и дают закон $1/r$.

Обозначения. $T_0 = T(r_0)$, $n_0 = n(r_0)$, $\Delta T = T_\infty - T_0$; $q = dQ/dt$ и $\dot N = dN/dt$ — потоки тепла и молекул пара через сферу радиусом r (положительный — от капли); плотность пара $\rho = n\,\mu_{H_2O}/N_A$.

Пункт А1. Поток q через любую сферу один и тот же — константа, пока неизвестная; найдём её по температурам T_0 на поверхности и T_∞ вдали. Из уравнения для dQ/dt получаем $\dfrac{dT}{dr} = -\dfrac{q}{4\pi\kappa\, r^2}$. Умножим на dr и просуммируем от поверхности капли (r_0, температура T_0) до бесконечности (T_∞), применив подсказку $\displaystyle\int_{r_0}^{\infty} \frac{dr}{r^2} = \frac{1}{r_0}$:

$$T_\infty - T_0 = -\frac{q}{4\pi\kappa}\cdot\frac{1}{r_0} \quad\Rightarrow\quad q = -4\pi\kappa\, r_0\,(T_\infty - T_0).$$

Знак: $T_\infty > T_0$, поэтому $q < 0$. Положительным считаем поток *от* капли, так что тепло идёт к капле, как и должно быть. С верхним пределом r вместо ∞ получаем

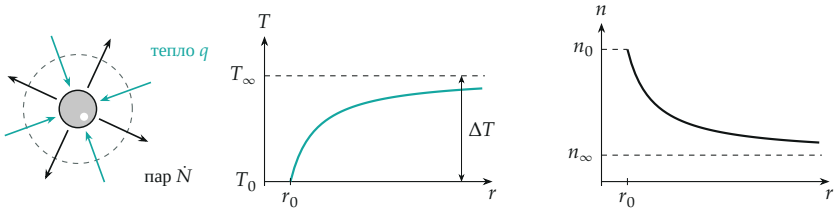
$$T(r) = T_0 + (T_\infty - T_0)\Big(1 - \frac{r_0}{r}\Big) = T_\infty - (T_\infty - T_0)\,\frac{r_0}{r}.$$

Пункт А2. Для пара так же: ни одна молекула не остановится по дороге, поэтому $\dot N = -D\,4\pi r^2\,dn/dr$ одинаково через любую сферу, и суммирование от r_0 до ∞ даёт

$$n_\infty - n_0 = -\frac{\dot N}{4\pi D\, r_0} \quad\Rightarrow\quad \dot N = 4\pi D\, r_0\,(n_0 - n_\infty),$$

За время t уйдёт $\dot N\, t$ молекул массой μ_{H_2O}/N_A каждая:

$$m = \dot N\, t\,\frac{\mu_{H_2O}}{N_A} = 4\pi D\, r_0\, t\,(n_0 - n_\infty)\,\frac{\mu_{H_2O}}{N_A} = 4\pi D\, r_0\, t\,\Delta\rho.$$



Слева: тепло идёт к капле, пар — от капли. Справа: $T(r)$ и $n(r)$ выходят на значения на бесконечности по закону $1/r$.

Пункт А3. Температура капли постоянна, значит, вся теплота, которая приходит к ней из воздуха, расходуется на испарение: иначе капля грелась бы или остывала. Тепловой поток к капле — это модуль $|q| = 4\pi\kappa r_0\,\Delta T$ из пункта А1, а на испарение уходит $L\,dm/dt$, где $dm/dt = 4\pi D\,r_0\,\Delta\rho$ из пункта А2:

$$4\pi\kappa\,r_0\,\Delta T = L\cdot 4\pi D\,r_0\,\Delta\rho \quad\Rightarrow\quad \Delta\rho = \frac{\kappa}{LD}\,\Delta T.$$

Часть В. Среднеквадратичная скорость молекул $v = \sqrt{3RT/\mu}$, поэтому

$$\frac{v_\text{в}}{v_{H_2O}} = \sqrt{\frac{\mu_{H_2O}}{\mu_\text{в}}} = \sqrt{\frac{18}{29}} = 0{,}788.$$

Плотность воздуха из уравнения Менделеева — Клапейрона $\rho_\text{в} = \dfrac{p\,\mu_\text{в}}{RT}$, поэтому $\dfrac{c_V\rho_\text{в}}{\mu_\text{в}} = 2{,}5R\cdot\dfrac{p}{RT} = \dfrac{2{,}5\,p}{T}$ — газовая постоянная сократилась:

$$\frac{\kappa}{D} = 0{,}788\cdot\frac{2{,}5\cdot10^5\text{ Па}}{300\text{ К}} = 0{,}788\cdot 833\,\frac{\text{Дж}}{\text{К}\cdot\text{м}^3} \approx 0{,}657\cdot10^3\,\frac{\text{Дж}}{\text{К}\cdot\text{м}^3}.$$

Так как $\kappa/D \propto 1/T$, при 310 К оно равно 635 — меньше лишь на 3 %.

Часть С. Подставим κ/D в результат пункта А3 (переводим в г/м^3):

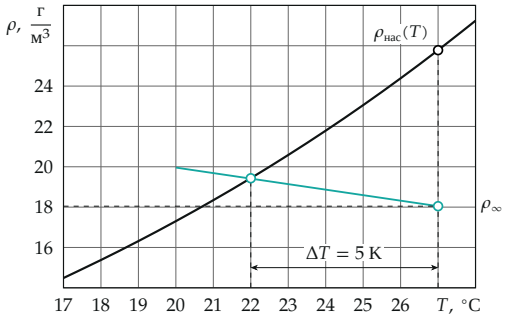
$$\Delta\rho = \frac{\kappa/D}{L}\,\Delta T = \frac{657}{2{,}4\cdot10^6}\,\Delta T\,\frac{\text{кг}}{\text{м}^3} = 0{,}274\,\frac{\text{г}}{\text{м}^3\cdot\text{К}}\cdot\Delta T.$$

У самой поверхности воды пар насыщенный, поэтому $\rho(r_0) =$

$\rho_{\text{нас}}(T_0) = \rho_{\text{нас}}(T_\infty - \Delta T)$. На бесконечности $\rho_\infty = \varphi_\infty \rho_{\text{нас}}(T_\infty) = 0{,}7 \cdot 25{,}8$ г/м^3 $= 18{,}1$ г/м^3 ($\rho_{\text{нас}}(27\,^\circ\text{C})$ по графику: 4,5 клетки по 0,4 г/м^3 выше линии 24, то есть 25,8). Условие $\Delta\rho = 0{,}274\,\Delta T$ превращается в уравнение

$$\rho_{\text{нас}}(T_0) = 18{,}1 + 0{,}274\,(27 - T_0),$$

Его решение — пересечение графика $\rho_{\text{нас}}(T)$ с прямой в правой части: прямая проходит через точку (27 °C; 18,1 г/м^3) с наклоном $-0{,}274$ г/(м$^3\cdot$ K). Ось — в °C: входит лишь разность температур. При 17 °C прямая даёт $18{,}1 + 2{,}7 \approx 20{,}8$ г/м^3.



Графическое решение: прямая пересекает график насыщенного пара при $T_0 = 22\,^\circ$C, то есть $\Delta T = 5$ K.

Пересечение при $T_0 \approx 22\,^\circ$C: там $\rho_{\text{нас}} = 19{,}4$ г/м^3 и $18{,}1 + 0{,}274 \cdot 5 = 19{,}4$ г/м^3. Значит, $\Delta T = 27 - 22 = 5$ K, с погрешностью порядка 0,5 K. Это много меньше 300 K, и κ/D постоянно.

Проверка. Размерность: $[\kappa/D]$ = Дж/(К·м^3), и $\kappa\Delta T/(LD)$ — в кг/м^3, плотность, верно. Предел: при $\varphi_\infty = 1$ воздух насыщен, и единственное решение — $\Delta T = 0$: нет охлаждения. Числа: $\rho_{\text{нас}}(22) - \rho_\infty = 19{,}4 - 18{,}1 = 1{,}3 \approx 0{,}274 \cdot 5$.

Физический смысл. Чем суше воздух, тем сильнее испарение и охлаждение капли.

Ответ. A1) $\dfrac{dQ}{dt} = -4\pi\kappa r_0\,(T_\infty - T(r_0))$, $T(r) = T_\infty - (T_\infty - T(r_0))\dfrac{r_0}{r}$; A2) $m = 4\pi D r_0 t\,(n(r_0) - n_\infty)\dfrac{\mu_{H_2O}}{N_A}$; A3) $\Delta\rho = \kappa\Delta T/(LD)$; B) $\kappa/D \approx 0{,}657 \cdot 10^3$ Дж/(К·м^3); C) $\Delta T = 5 \pm 0{,}5$ K.