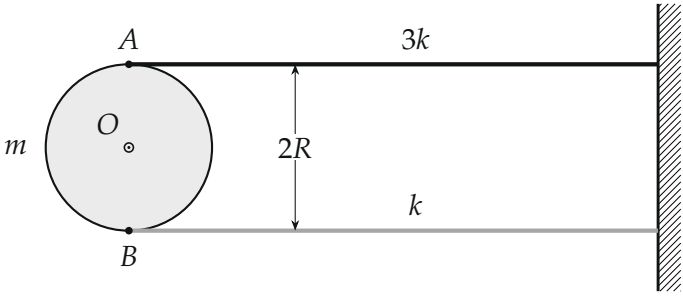
Диск на резинках

Задача 7. [МОШ 2020/21, 11 класс, задача 7] Масса горизонтально расположенного диска, насаженного на вертикальную ось O (см. рисунок), равна m и равномерно распределена по границе диска — окружности радиусом R. В точках A и B, лежащих на одном диаметре закреплены резиновые нити жёсткостью k и $3k$, другие концы нитей присоединены к вертикальной стене. В положении равновесия отрезок AB располагается параллельно стене, нити не провисают, но и не деформированы, расстояние между ними равно $2R$.



Вид сверху.

А. Пусть диск может вращаться, не испытывая трения, вокруг оси. Определите период малых колебаний диска.

В. Ось вращается по часовой стрелке с достаточно большой постоянной угловой скоростью. Трение между осью и диском сухое. Максимальный момент сил трения, действующих на диск равен M_0 ($M_0 \ll kR^2$). Сначала диск удерживают в положении равновесия, потом отпускают.

В1) Через какое время после этого угловая скорость диска станет максимальной?

В2) Чему равна максимальная угловая скорость диска?

В3) Как изменится ответ, если диск будет вращаться против часовой стрелки?

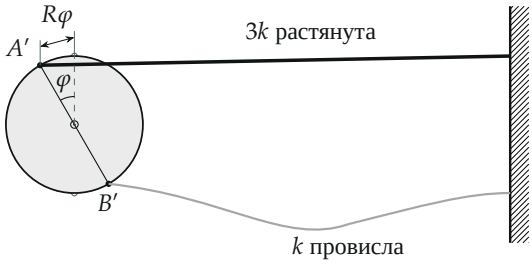
▲ **Решение. Что происходит.** Откуда вообще возьмутся колебания? Повернём диск на малый угол φ и отпустим. Резинка — не пружина: она

тянет, но не толкает. Поэтому при повороте в одну сторону растягивается одна нить, а вторая провисает и ничего не делает; при повороте в другую сторону — наоборот. Растянутая нить тянет диск назад к равновесию: это и есть возвращающая сила, значит, колебания будут. Но жёсткость у них разная в разные стороны ($3k$ на одной полуволне, k на другой), и сразу брать формулу $2\pi\sqrt{m/k}$ нельзя. Идея: на каждой полуволне работает одна нить, а там колебания обычные гармонические — их и сложим. Класс задачи — вращение вокруг неподвижной оси и малые колебания.

Обозначения. φ — малый угол поворота диска от равновесия, положительный при вращении против часовой стрелки (вид сверху, как на рисунке); I — момент инерции диска; $\theta = -\varphi$ — угол поворота по часовой стрелке (для части В).

1. Момент инерции. Вся масса сосредоточена на окружности радиуса R, поэтому $I = mR^2$.

2. Какая нить работает. При повороте на малый угол φ точка диска на расстоянии R от оси смещается по касательной, то есть перпендикулярно радиусу. Для точек A и B радиус вертикален, смещение горизонтально и равно $R|\varphi|$. Нити тоже горизонтальны, поэтому удлинение нити равно этому смещению (с точностью до малых второго порядка). По той же причине сила растянутой нити остаётся перпендикулярной стене: смещение $R\varphi$ мало по сравнению с длиной нити, и нить не успевает заметно наклониться.



Диск повернут против часовой стрелки на φ (для наглядности угол велик; точки A' и B' — новые положения A и B). Нить $3k$ тянет, нить k провисла.

Поворот против часовой стрелки ($\varphi > 0$): верхняя точка A сдвигается от стены, нить $3k$ удлиняется на $R\varphi$; нижняя точка B сдвигается к стене, нить k провисает и не действует. Поворот по часовой стрелке ($\varphi < 0$): наоборот, растягивается нить k на $R|\varphi|$, а нить $3k$ провисает.

3. Момент сил и его график. Натяжение растянутой нити $3k \cdot R\varphi$ горизонтально, а её плечо относительно оси — расстояние от O до прямой нити, то есть R. Поэтому

$$M = -3kR^2\varphi \ \ (\varphi > 0), \qquad M = -kR^2\varphi \ \ (\varphi < 0),$$

в обоих случаях момент возвращает диск к равновесию: график $M(\varphi)$ — ломаная с изломом в нуле, крутая ветвь при $\varphi > 0$ (наклон $-3kR^2$) и пологая при $\varphi < 0$ (наклон $-kR^2$).

4. Полуволны. Запишем основной закон вращательного движения диска вокруг неподвижной оси: $I\ddot{\varphi} = M$ (диск твёрдый, ось неподвижна).

При $\varphi > 0$: $mR^2\ddot{\varphi} = -3kR^2\varphi$ — гармонические колебания с $\omega_2 = \sqrt{3k/m}$. Диск уходит от равновесия, останавливается и возвращается; всё это время работает только нить $3k$, и это ровно половина периода такого колебания: $t_2 = \dfrac{\pi}{\omega_2} = \pi\sqrt{\dfrac{m}{3k}}$.

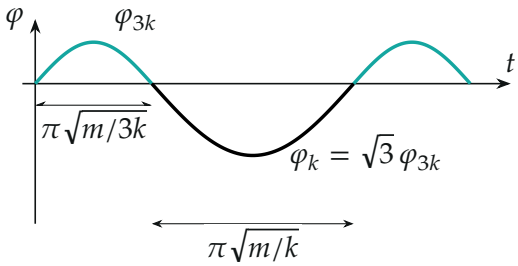
При $\varphi < 0$ — то же с $\omega_1 = \sqrt{k/m}$, полупериод $t_1 = \pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$.

Тот же результат даёт энергия: $\frac{1}{2}mR^2\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}\,3kR^2\varphi^2 = \text{const}$ — гармонические колебания с $\omega_2^2 = 3k/m$, а полуволна — от равновесия до амплитуды и обратно, две четверти периода. Вернувшись в равновесие, диск имеет ту же по модулю угловую скорость (энергия сохраняется, трения нет) и по инерции уходит в другую сторону, где включается нить k. Амплитуда на мягкой нити больше: по энергии $\frac{1}{2}I\omega_0^2 = \frac{1}{2}kR^2\varphi_к^2 = \frac{1}{2}\,3kR^2\varphi_{3k}^2$, то есть $\varphi_к = \sqrt{3}\,\varphi_{3k}$.

5. Период. Полный период — одна полуволна на каждой нити:

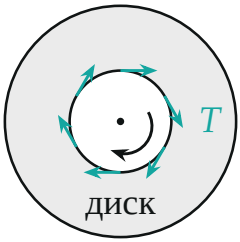
$$T = \pi\sqrt{\frac{m}{k}} + \pi\sqrt{\frac{m}{3k}} = \pi\sqrt{\frac{m}{k}}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \approx 4{,}95\sqrt{\frac{m}{k}}.$$

Это не период со «средней» жёсткостью: каждая нить работает свои полпериода.



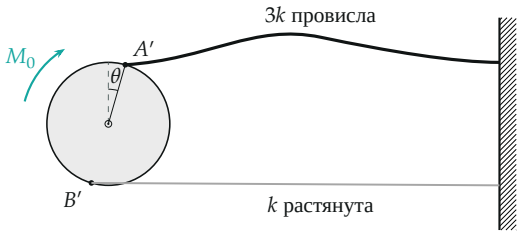
Колебания диска: бирюзовые участки — работает нить 3k (быстро, малая амплитуда), чёрный — нить k (медленно, амплитуда в $\sqrt{3}$ раз больше).

Часть В. Что происходит. Представим опыт: диск — деревянное колесо, ось — гладкий вал, на который оно надето. Вал вращается по часовой стрелке, а колесо пока удерживают. На стенку отверстия колеса со стороны вала действуют маленькие силы трения T, направленные по касательной в сторону вращения вала. Радиус вала $r \ll R$, его вклад в момент инерции диска не учитываем. Сумма их моментов относительно оси — это $M_0 = \sum rT$; отпустим колесо — они раскрутят его по часовой стрелке.



Контакт вала с диском: силы трения T на диск направлены по вращению вала (по часовой стрелке); белый круг — вал.

Ось вращается быстро, диск всегда отстаёт от вала: трение скольжения, его момент M_0 не зависит от скорости диска. Диск поворачивается по часовой стрелке — работает нить k ($3k$ провисает), и диск колеблется около нового равновесия, где момент нити уравновешивает трение.



Диск повернут по часовой стрелке на θ (угол преувеличен). Момент трения M_0 вращает диск по часовой стрелке, возвращает его нить k.

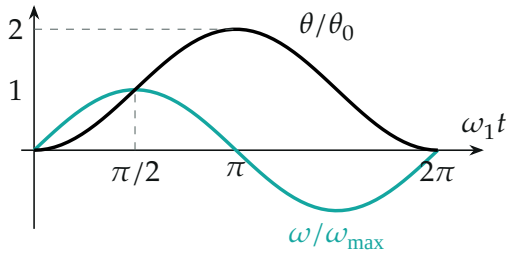
6. Уравнение движения. Основной закон вращательного движения для угла θ по часовой стрелке (туда же вращается ось): момент трения $+M_0$ раскручивает диск, нить k возвращает моментом $-kR^2\theta$ (пункт 3):

$$mR^2\ddot{\theta} = M_0 - kR^2\theta \quad \Longleftrightarrow \quad \ddot{\theta} = -\omega_1^2\,(\theta - \theta_0),$$

где $\omega_1 = \sqrt{k/m}$, $\theta_0 = M_0/(kR^2)$ — гармонические колебания около θ_0. Начальные условия: диск отпускают в положении равновесия, $\theta(0) = 0$, $\dot{\theta}(0) = 0$. Тогда

$$\theta(t) = \theta_0\,(1 - \cos\omega_1 t), \qquad \omega(t) = \dot{\theta} = \theta_0\omega_1 \sin\omega_1 t.$$

Условие $M_0 \ll kR^2$ даёт $\theta_0 \ll 1$ — углы малы; трение всё время скольжения, так как $\omega \le \theta_0\omega_1 \ll \Omega$.



Угловая скорость и угол поворота диска в части B1; вся картина повторяется с периодом $2\pi\sqrt{m/k}$.

Почему диск не пойдёт против часовой стрелки. В начальный момент $\dot{\theta} = 0$, а $\ddot{\theta} = M_0/(mR^2) > 0$: диск трогается по часовой стрелке.

Решение $\theta = \theta_0(1 - \cos\omega_1 t) \geq 0$ никогда не отрицательно: в моменты $\omega_1 t = 2\pi n$ диск в точности в начальном состоянии (угол нуль, скорость нуль), а оттуда он снова пойдёт в ту же сторону. Нить $3k$ так и остаётся провисшей.

B1. Угловая скорость $\omega(t) = \theta_0\omega_1 \sin\omega_1 t$ максимальна при $\omega_1 t = \pi/2$ — это четверть периода (диск как раз проходит новое положение равновесия θ_0, где момент нити равен моменту трения и угловое ускорение нулевое):

$$t_1 = \frac{\pi}{2\omega_1} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{m}{k}}.$$

B2.

$$\omega_{\max} = \theta_0\omega_1 = \frac{M_0}{kR^2}\sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{M_0}{R^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{km}}.$$

Обратите внимание: максимум скорости — не при $\theta = 0$ и не при $2\theta_0$, а где угловое ускорение нулевое: $M_0 = kR^2\theta$.

B3. Если ось вращается против часовой стрелки, момент трения направлен против часовой стрелки, диск поворачивается так, что растягивается нить $3k$, а нить k провисает. Всё то же самое с заменой $k \to 3k$:

$$t_2 = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{m}{3k}}, \qquad \omega^{(2)}_{\max} = \frac{M_0}{R^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{3km}}.$$

Нить жёстче — обе величины меньше в $\sqrt{3}$ раз.

Проверка. Второй способ для B2 — энергия. К максимуму скорости диск повернулся на θ_0:

$$\tfrac{1}{2}mR^2\omega^2_{\max} = M_0\theta_0 - \tfrac{1}{2}kR^2\theta_0^2 = \frac{M_0^2}{2kR^2}, \qquad \omega_{\max} = \frac{M_0}{R^2\sqrt{km}},$$

как и выше. Размерность — с^{-1}. Предел $M_0 \to 0$: $\omega_{\max} \to 0$.

Ответ. A) $T = \pi\left(\sqrt{\frac{m}{k}} + \sqrt{\frac{m}{3k}}\right)$; B1) $t_1 = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{m}{k}}$; B2) $\omega_{\max} = \frac{M_0}{R^2\sqrt{km}}$; B3) $t_2 = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{m}{3k}}$, $\omega^{(2)}_{\max} = \frac{M_0}{R^2\sqrt{3km}}$.