Шлирен-метод

Задача 8. [МОШ 2020/21, 11 класс, задача 8] Для наблюдения и фотографирования оптических неоднородностей в прозрачных средах часто применяют шлирен-метод (теневой метод), который может быть реализован по схеме, изображённой на рисунке. Две тонкие линзы L_1 и L_2 располагаются параллельно друг другу, так что их оптические оси совпадают. В фокусе одной линзы, в т. F_1 находится точечный источник света. В фокальной плоскости другой линзы (т. F_2) располагается нож Фуко — большой прямоугольный непрозрачный экран K с острой кромкой, которая выступает над уровнем оптической оси на небольшое расстояние h. Фокальная плоскость объектива фотоаппарата совпадает с фокальной плоскостью линзы L_2.

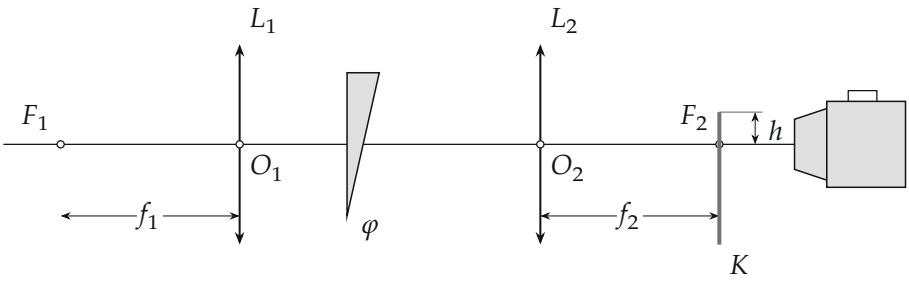
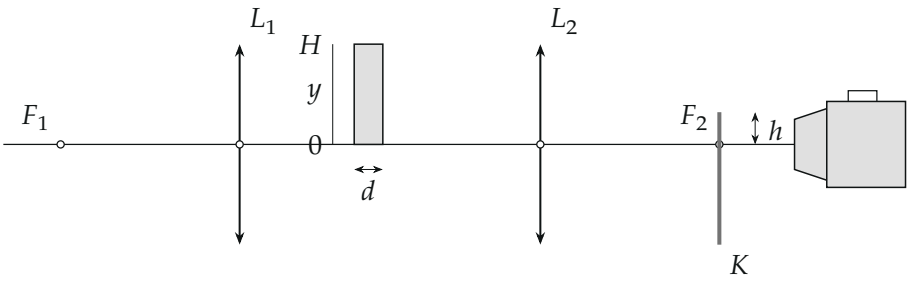


Схема шлирен-метода (рисунок организаторов). Призма с малым преломляющим углом φ стоит основанием вверх.

А. Пусть между линзами располагается (как показано на рисунке) призма с малым преломляющим углом φ и показателем преломления n. Фокусное расстояние линзы L_2 равно f_2. При каких значениях h на фотографии ничего не будет видно?

В. Призму заменяют на плоско-параллельную пластинку (см. рис. ниже) толщиной d и высотой H ($d \ll H$), показатель преломления которой линейно зависит от координаты y: $n(y) = n_0\left(1 + \dfrac{\alpha y}{H}\right)$, значения n_0 и α ($\alpha \ll 1$) считаются известными.



Пластинка с неоднородным показателем преломления: y отсчитывается от оси вверх.

C. Практически реализовать точечный источник света довольно трудно. Обычно на пути света, идущего от протяжённого источника S (рис. ниже), размещают диафрагму D — непрозрачный экран с маленьким отверстием диаметром d ($d \ll f_1, f_2$).

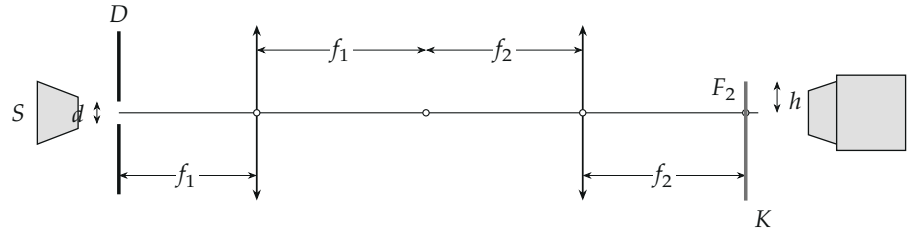
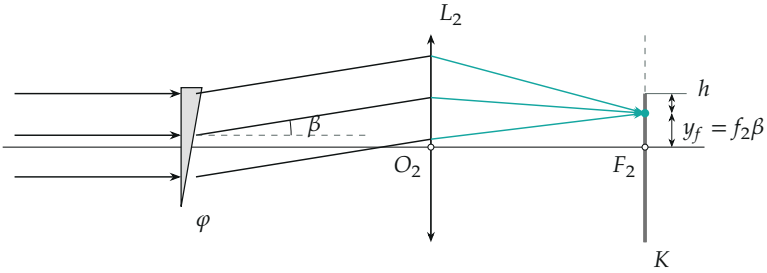


Схема с диафрагмой. Расстояние между линзами равно f_1+f_2: задний фокус L_1 и передний фокус L_2 совпадают.

При каких значениях h на фотографии опять ничего не будет видно, если расстояние между линзами равно $f_1 + f_2$?

▲ **Решение.** **Что происходит.** Класс задачи — геометрическая оптика тонких линз. Источник стоит в фокусе L_1, значит, после неё свет идёт параллельным пучком вдоль оси. Если пучок ничего не встретил, L_2 собирает его в точку своей фокальной плоскости, где стоит нож; положение точки задаёт только угол пучка с осью. Без неоднородности точка — в F_2, ниже кромки ($h > 0$): свет закрыт. Неоднородность отклоняет пучок на угол β, точка поднимается на $f_2\beta$; «ничего не видно», пока она осталась на ноже. Осталось найти β.

Обозначения. Ось y направлена вверх от оптической оси; нож закрывает всё, что ниже кромки, то есть $y < h$; β — угол, на который неоднородность отклоняет пучок (малый; при отклонении вверх $\beta > 0$); y_f — высота, на которую приходит свет в фокальной плоскости L_2.



Параллельный пучок, отклонённый вверх на малый угол β (угол увеличен), собирается линзой L_2 в точке на высоте $y_f = f_2\beta$ над осью. Кромка ножа на высоте h выше этой точки: свет закрыт.

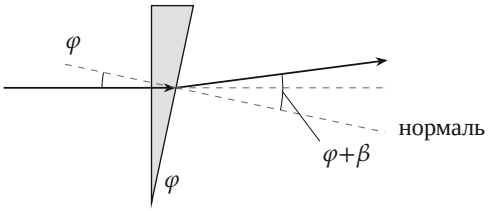
1. Куда приходит свет. Из всех лучей наклонного пучка выберем тот, что проходит через оптический центр O_2: тонкая линза его не преломляет. Он идёт под углом β к оси и до фокальной плоскости, находящейся на расстоянии f_2 от линзы, поднимается на $f_2 \tan\beta \approx f_2\beta$. Остальные лучи пучка параллельны ему и по свойству линзы сходятся в той же точке: $y_f = f_2\beta$.

2. Условие темноты. Нож закрывает всё ниже кромки. Свет не доходит до объектива, пока $y_f \le h$, то есть при $h \ge f_2\beta$.

Часть А. Призма. Левая грань призмы перпендикулярна оси (рисунок организаторов): угол падения нулевой, и по закону Снеллиуса $1 \cdot \sin 0 = n \sin\alpha$ угол преломления тоже нулевой — пучок входит в стекло не преломляясь и идёт вдоль оси. Вторая грань наклонена к первой на угол φ, поэтому нормаль к ней отклонена от вертикали на тот же φ, и луч приходит на неё под углом падения φ. На выходе из стекла в воздух: $n \sin\varphi = \sin(\varphi + \beta)$, где $\varphi + \beta$ — угол преломления (он больше φ, потому что $n > 1$; β — поворот луча относительно оси). Для малых углов $n\varphi = \varphi + \beta$, значит,

$$\beta = (n-1)\varphi,$$

и луч отклоняется к основанию призмы, то есть вверх (рисунок).



Ход луча в призме: вход по нормали, на второй грани угол падения φ, выход под углом $\varphi+\beta$ к нормали; луч поворачивается к основанию призмы на β (углы увеличены).

Условие темноты: $h \geq (n-1)\varphi f_2$. Часть пучка мимо призмы идёт вдоль оси в F_2 и закрыта при $h > 0$.

Часть В. Пластинка с градиентом показателя. Здесь легко ошибиться: пучок падает на пластинку перпендикулярно, «значит, идёт прямо», и тогда нож можно поднять сколь угодно мало, $h \geq 0$ — для второго тура ответ подозрительный. Ошибка в том, что показатель разный на разной высоте: соседние лучи идут с разной скоростью. Пластинка работает как призма, у которой угол «плавает» от слоя к слою. Покажем это двумя способами.

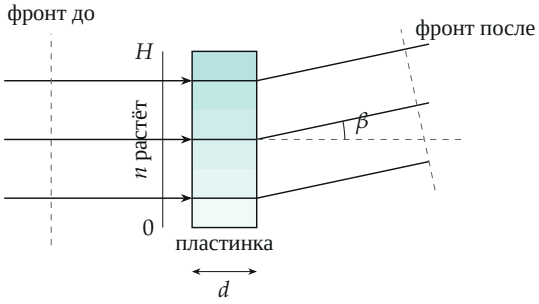
Первый способ — волновой фронт. Все лучи пучка идут от источника к линзе, собирающей их в одну точку, за одно и то же время (принцип Ферма): иначе лучи не сошлись бы. Значит, поверхность, перпендикулярная лучам (фронт), должна проходить свои участки за равное время. В среде с показателем n свет идёт со скоростью c/n, поэтому на толщине d набегает оптический путь $n\,d$. Возьмём два соседних луча на высотах y и $y+\Delta y$. До пластинки фронт плоский и вертикальный: фаза у лучей одинакова. После пластинки верхний луч (где n больше при $\alpha > 0$) отстаёт от нижнего на оптический путь

$$\Delta = (n(y+\Delta y) - n(y))d = \frac{dn}{dy}\,d\,\Delta y = \frac{n_0\alpha}{H}\,d\,\Delta y.$$

Фронт — это поверхность равной фазы, лучи перпендикулярны ему. Отстающий верх означает поворот фронта на угол β с $\operatorname{tg}\beta = \Delta/\Delta y$, и

лучи поворачиваются в сторону бóльшего показателя, то есть вверх:

$$\beta = d\,\frac{dn}{dy} = \frac{\alpha n_0\, d}{H}.$$



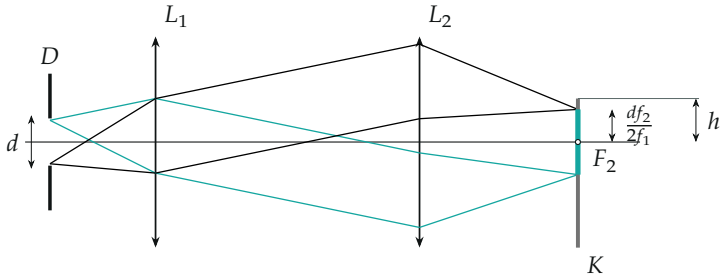
Фронт волны после пластинки наклонён: верх отстаёт. Лучи перпендикулярны фронту, поэтому идут вверх, в сторону большего n (угол β увеличен).

Второй способ — законы преломления. Разобьём пластинку на тонкие слои $y = \text{const}$, в каждом n постоянен. Луч идёт под малым углом θ к оси z (вверх), нормаль к границам слоёв — ось y, угол падения на границу равен $90° - \theta$, и закон Снеллиуса на каждой границе даёт одну и ту же величину: $n(y)\cos\theta = \text{const}$ вдоль луча. Продифференцируем по z, учитывая $dy/dz = \operatorname{tg}\theta$: $n'\sin\theta = n\sin\theta\cdot\theta'$, то есть $\dfrac{d\theta}{dz} = \dfrac{n'}{n}$. Луч заворачивает в сторону большего n, равномерно по толщине, и к выходу $\theta = \dfrac{n'd}{n}$. На выходе нормаль — ось z, угол падения θ, и $\sin\beta = n\sin\theta$, откуда $\beta = n\theta = d\,\dfrac{dn}{dy}$ — так же, как в первом способе. Показатель n сокращается, поэтому угол не зависит от высоты: во всей пластинке луч отклоняется одинаково.

Условие темноты $h \geq f_2\beta$ даёт $h \geq \alpha n_0 d f_2/H$. При $\alpha < 0$ лучи идут вниз, и всё закрыто при любом $h > 0$.

Часть С. Диафрагма вместо точечного источника. Каждая точка отверстия даёт свой параллельный пучок. Пусть точка отверстия находится на высоте s над осью ($|s| \leq d/2$). Через L_1 она даёт пучок, идущий под углом s/f_1 вниз (точка выше фокуса). Линза L_2 собирает пучок

в фокальной плоскости; вычислим, куда, по лучу через O_2. Этот луч наклонён на s/f_1 вниз и до плоскости ножа проходит f_2: $y = -sf_2/f_1$. Отверстие целиком даёт в плоскости ножа перевёрнутое изображение, увеличенное в f_2/f_1 раз: отрезок от $-\dfrac{df_2}{2f_1}$ до $+\dfrac{df_2}{2f_1}$ вокруг оси.



Бирюзовые лучи — от верхнего края отверстия, чёрные — от нижнего. После L_1 каждый из двух пучков параллелен, L_2 собирает их по разные стороны от оси; изображение отверстия на ноже — бирюзовый отрезок (размеры преувеличены).

Свет не проходит, если всё изображение лежит на ноже, то есть самая высокая его точка не выше кромки: $h \geq df_2/(2f_1)$ — нож перекрывает уже не точку, а пятно. Если между линзами по-прежнему стоит призма или пластинка, пятно ещё и сдвинуто вверх на $f_2\beta$, и условие темноты складывается: $h \geq df_2/(2f_1) + f_2\beta$ (β из А или В).

К фотографии из условия. Рука и горелка тёмные; горячий воздух неоднороден, его лучи проходят выше ножа — светлый поток; серый фон — лучи от краёв источника (часть С).

Проверка. А: при $\varphi \to 0$ или $n \to 1$ порог $h \to 0$. В: $\alpha n_0 df_2/H$ — длина. С: при $d \to 0$ порог $h \to 0$. Нож — порог по углу отклонения h/f_2.

Ответ. А) $h \geq (n-1)\varphi f_2$; В) $h \geq \dfrac{\alpha n_0 df_2}{H}$; С) $h \geq \dfrac{df_2}{2f_1}$ (если призма или пластинка остаются — плюс $f_2\beta$ из А или В).