«Фонарь Фарадея»

Задача 9. [МОШ 2020/21, 11 класс, задача 9] В фонаре Фарадея аккумулятор заряжается благодаря подвижному магниту, периодически пролетающему через катушку индуктивности. Чтобы фонарь заряжался, его нужно трясти в руке, чтобы магнит быстро летал туда-сюда сквозь катушку. На рис. ниже показана упрощённая схема фонаря. ЭДС аккумулятора равна $\mathscr{E} = 3{,}6$ В. Катушка состоит из $n = 3000$ витков проволоки, её внутренний радиус чуть больше радиуса магнита, индуктивность и активное сопротивление равны: $L = 0{,}1$ Гн и $R = 50$ Ом соответственно. Диаметр цилиндрического магнита и его длина равны: $d = 15$ мм и $h = 23$ мм. Длина катушки равна длине магнита h.

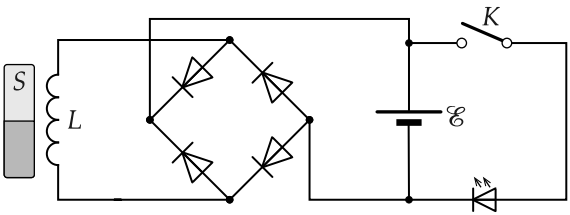


Схема фонаря (рисунок организаторов): катушка L с магнитом, диодный мост, аккумулятор $\mathscr{E}$, ключ K и светодиод.

Пусть фонарь трясут с частотой $\nu = 4$ Гц. Магнит движется в пластиковой трубке длиной $H = 12{,}3$ см. Для оценок, которые требуется сделать в этой задаче, предлагается считать, что магнит в трубке совершает гармонические колебания с амплитудой $0{,}5(H-h)$, диоды — идеальные, внутреннее сопротивление аккумулятора и проводов много меньше сопротивления катушки R.

А. Вычислите приближённо максимальную ЭДС индукции и максимальную ЭДС самоиндукции в катушке (по модулю). Найдите отношение этих величин. Убедитесь, что одна из них много больше другой.

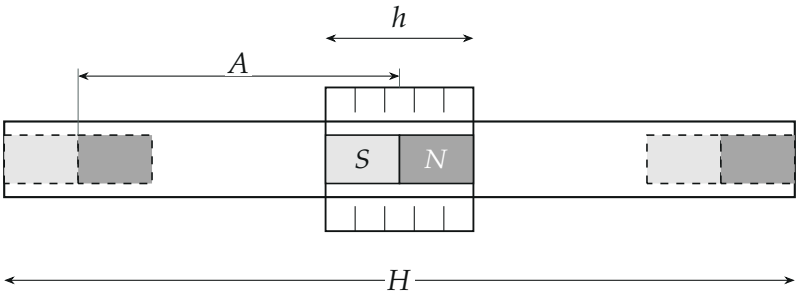
В. Какое примерно число раз магнит должен пролететь сквозь катушку, чтобы в аккумуляторе накопилась энергия $E = 50$ Дж?

C. Определите приближённо отношение времени зарядки (тряски) ко времени работы без тряски, если потребляемая светодиодом от аккумулятора мощность равна $P = 0{,}5$ Вт.

▲ **Решение. Что происходит.** Магнит проходит сквозь катушку, поток через её витки меняется, и в катушке возникает ЭДС индукции. Диодный мост делает так, что ток через аккумулятор течёт в одну и ту же сторону, как бы ни менялся знак ЭДС. Аккумулятор заряжается, пока $|\mathcal{E}_{\text{инд}}| > \mathcal{E}$ и по цепи течёт ток $(|\mathcal{E}_{\text{инд}}| - \mathcal{E})/R$. Главная идея: сначала оценить ЭДС индукции по скорости магнита, затем сравнить с ней ЭДС самоиндукции, а потом посчитать заряд за один пролёт и энергию, которая при этом попадает в аккумулятор. Задача класса «индукция → цепь → энергия».

Обозначения. $A = \dfrac{H-h}{2} = 5{,}0$ см — амплитуда колебаний магнита; $\omega = 2\pi\nu = 25{,}1$ с$^{-1}$; координата центра магнита от центра катушки $x = A\sin\omega t$; $S = \pi d^2/4 = 1{,}77\cdot10^{-4}$ м^2 — площадь сечения магнита; B_0 — индукция поля внутри магнита; Ψ — потокосцепление катушки ($\Psi = n\Phi$, Φ — поток через один виток).

Замечание об исходных данных. Индукция магнита B_0 в условии не задана ни числом, ни косвенно (поток, ЭДС, данные опыта — в условии организаторов их нет; индуктивность $L \approx \mu_0 n^2 S/h = 0{,}09$ Гн описывает только саму катушку). Официального ответа к этой версии задачи тоже нет. Поэтому решаем в общем виде через B_0; числа ниже — для примера при $B_0 = 0{,}3$ Тл (ферритовый магнит) и $B_0 = 1$ Тл (неодимовый), а не как «правильный» ответ.



Колебания магнита в трубке. Магнит (серый — южный полюс S, тёмный — северный N) показан в среднем и двух крайних положениях; катушка длиной h стоит посередине трубки.

1. Поток через катушку. Магнит и катушка одной длины, радиус катушки чуть больше радиуса магнита. Поток внутри магнита почти весь пронизывает витки, которые лежат против него, а витки вне магнита почти ничего не ловят. Поэтому поток растёт линейно по мере въезда магнита в катушку (пропорционально длине перекрытия) и достигает максимума, когда они совпадают. Для смещения центра магнита ξ от центра катушки:

$$\Psi(\xi) = nB_0S\left(1 - \frac{|\xi|}{h}\right), \quad |\xi| < h; \qquad \Psi = 0 \text{ при } |\xi| \geq h.$$

Это грубая модель (на самом деле острые углы сглажены), но она передаёт главное: потокосцепление меняется от нуля до nB_0S на расстоянии порядка h.

Часть А. ЭДС индукции. По закону электромагнитной индукции $|\mathcal{E}_{\text{инд}}| = |d\Psi/dt| = nB_0S|v|/h$, где $v = \dot{x}$ — скорость магнита. При $x = A\sin\omega t$ скорость $v = A\omega\cos\omega t$, максимум $v_{\max} = A\omega = 1{,}26$ м/с. Магнит проходит середину трубки на максимальной скорости, поэтому и ЭДС максимальна при пролёте катушки:

$$\mathcal{E}_{\text{инд,max}} = \frac{nB_0S\,v_{\max}}{h} = \frac{nB_0S\cdot 2\pi\nu A}{h} \approx 29\,\frac{\text{В}}{\text{Тл}}\cdot B_0,$$

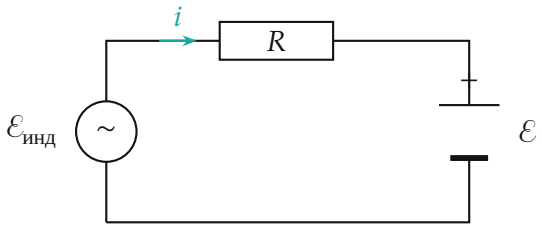
то есть 8,7 В при $B_0 = 0{,}3$ Тл и 29 В при $B_0 = 1$ Тл. Это больше ЭДС аккумулятора 3,6 В, если $B_0 \gtrsim 0{,}13$ Тл, — только тогда фонарь вообще заряжается.

ЭДС самоиндукции. $\mathcal{E}_{\text{си}} = L|dI/dt|$. Ток течёт, пока $\mathcal{E}_{\text{инд}} > \mathcal{E}$: $I_{\max} \approx (\mathcal{E}_{\text{инд,max}} - \mathcal{E})/R$. Меняется он за время, за которое магнит проходит свою длину: $\tau = h/v_{\max} = 18$ мс. Поэтому $\mathcal{E}_{\text{си,max}} \approx LI_{\max}/\tau$, и отношение

$$\frac{\mathcal{E}_{\text{си}}}{\mathcal{E}_{\text{инд}}} \approx \frac{L}{R\tau}\left(1 - \frac{\mathcal{E}}{\mathcal{E}_{\text{инд,max}}}\right) < \frac{L\,v_{\max}}{Rh} \approx 0{,}11.$$

Главное: эта оценка от B_0 не зависит — при любом магните ЭДС индукции почти на порядок больше ЭДС самоиндукции (при $B_0 = 0{,}3$ Тл: 8,7 В против 0,6 В, отношение 0,06). Тот же вывод: постоянная времени катушки $L/R = 2$ мс много меньше $\tau = 18$ мс, катушка успевает за ЭДС, как простой резистор. Поэтому в части В самоиндукцию не учитываем.

Часть В. Энергия за один пролёт. В цепи при $\mathcal{E}_{\text{инд}} > \mathcal{E}$ течёт ток $i = (|\mathcal{E}_{\text{инд}}| - \mathcal{E})/R$ (по второму правилу Кирхгофа, самоиндукцию отбросили), диодный мост направляет его в аккумулятор в одну сторону.

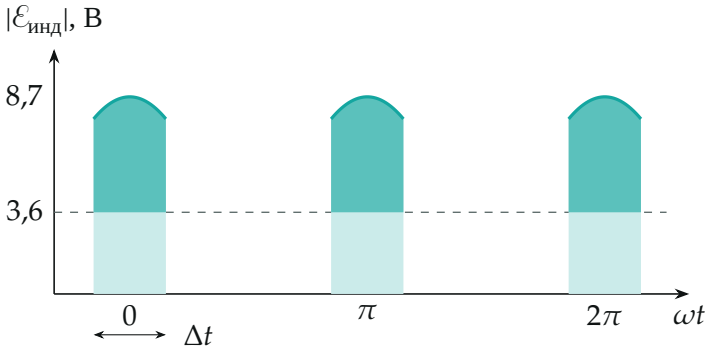


Эквивалентная схема на время пролёта: ЭДС индукции, резистор R и аккумулятор (диодный мост только направляет ток; самоиндукция отброшена).

Заряд за один пролёт. Пролёт — это движение магнита от $\xi = -h$ до $\xi = +h$, пока потокосцепление меняется. На краях, где $x = \pm h$, скорость $v = A\omega\sqrt{1 - (h/A)^2} = 0{,}89 v_{\max}$, и при $B_0 \gtrsim 0{,}14$ Тл ЭДС индукции превышает $\mathcal{E}$ весь пролёт. Тогда заряд, прошедший через аккумулятор за один пролёт,

$$q = \int i\,dt = \frac{1}{R}\left(\frac{nB_0S}{h}\int |v|\,dt - \mathcal{E}\,\Delta t\right) = \frac{2nB_0S - \mathcal{E}\,\Delta t}{R}.$$

Здесь мы использовали $\int |v|\,dt = 2h$ — путь магнита за пролёт. Время пролёта: $|x| < h$ при $|\sin\omega t| < h/A$, значит, $\Delta t = \dfrac{2}{\omega}\arcsin\dfrac{h}{A} = 0{,}038$ с, $\mathcal{E}\Delta t = 0{,}137$ Вб, а $2nS = 1{,}06$ Вб/Тл. Энергия, попавшая в аккумулятор за пролёт, $W_1 = \mathcal{E}q$; при $B_0 = 0{,}3$ Тл $q = 3{,}6 \cdot 10^{-3}$ Кл, $W_1 = 1{,}3 \cdot 10^{-2}$ Дж.



$|\mathcal{E}_{инд}|$ (пример при $B_0 = 0{,}3$ Тл): импульсы в моменты $\omega t = 0,\ \pi,\ 2\pi$ — по одному на каждый пролёт катушки (за период — два). Тёмная область над уровнем $\mathcal{E} = 3{,}6$ В — то, что идёт на зарядку.

Число пролётов. Чтобы накопить $E = 50$ Дж, нужно

$$N = \frac{E}{\mathcal{E}q} = \frac{ER}{\mathcal{E}\,(2nB_0S - \mathcal{E}\Delta t)} \approx \frac{690}{1{,}06\,B_0/\text{Тл} - 0{,}137}$$

пролётов: $\approx 3{,}8 \cdot 10^3$ при $B_0 = 0{,}3$ Тл и ≈ 750 при $B_0 = 1$ Тл.

Часть С. Время зарядки и время работы. За период магнит пролетает катушку дважды: $2\nu = 8$ пролётов в секунду, время тряски $t_{\text{тр}} = N/(2\nu)$. Энергии хватит на $t_{\text{раб}} = E/P = 100$ с. Отношение

$$\frac{t_{\text{тр}}}{t_{\text{раб}}} = \frac{NP}{2\nu E} = \frac{PR}{2\nu\,\mathcal{E}\,(2nB_0S - \mathcal{E}\Delta t)} \approx \frac{0{,}87}{1{,}06\,B_0/\text{Тл} - 0{,}137} :$$

≈ 5 при $B_0 = 0{,}3$ Тл (8 минут тряски на полторы минуты света) и ≈ 1 при $B_0 = 1$ Тл. Обратите внимание: в части В считаем именно энергию, которая попала в аккумулятор ($\mathcal{E}q$), а не работу ЭДС индукции. Работа индукционной ЭДС больше: часть её уходит в тепло на сопротивлении R.

Проверка. Второй способ для q — прямое численное интегрирование тока $i(t) = (|\mathcal{E}_{инд}| - \mathcal{E})/R$ по модели $x = A\sin\omega t$ — при $B_0 = 0{,}3$ Тл даёт те же $3{,}6 \cdot 10^{-3}$ Кл. Размерность: nB_0S/R — Вб/Ом = Кл. Предел: при $2nB_0S \to \mathcal{E}\Delta t$ заряд обращается в нуль, а $N \to \infty$ — слабый

магнит не может зарядить аккумулятор.

Ответ. (B_0 — индукция магнита, в условии не задана) А) $\mathcal{E}_{\text{инд,max}} = \dfrac{2\pi\nu n B_0 S A}{h} \approx 29\,\text{В} \cdot B_0/\text{Тл}$, $\dfrac{\mathcal{E}_{\text{си}}}{\mathcal{E}_{\text{инд}}} \lesssim \dfrac{2\pi\nu L A}{Rh} \approx 0{,}1$ (самоиндукцией можно пренебречь); В) $N = \dfrac{ER}{\mathcal{E}(2nB_0S - \mathcal{E}\Delta t)}$, $\Delta t = \dfrac{1}{\pi\nu}\arcsin\dfrac{h}{A}$; при $B_0 = 0{,}3$ Тл $N \approx 4 \cdot 10^3$; С) $\dfrac{t_{\text{тр}}}{t_{\text{раб}}} = \dfrac{NP}{2\nu E}$; при $B_0 = 0{,}3$ Тл ≈ 5, при $B_0 = 1$ Тл ≈ 1.