Ворота

Задача 10. [МОШ 2020/21, 11 класс, задача 10] Механизм, при помощи которого производится подъём откидных ворот гаража, изображён на рисунке ниже, при этом ворота ABC находятся в вертикальном положении (закрыты). Прикладывая силу к ручке, расположенной у нижнего края ворот в т. A, можно перевести ворота в горизонтальное положение (открыть). При подъёме ворот ролик C, закреплённый на их верхнем крае, движется по горизонтальным направляющим. В т. B ($AB = BC = L$) ворота шарнирно соединены с коромыслом, которое может вращаться вокруг неподвижной оси O. На другом конце коромысла находится груз массой $m = 25$ кг. Ворота можно считать тонкой однородной пластиной массой $M = 30$ кг. Массой коромысла и ролика, любыми видами трения, а также линейными размерами ролика и диска можно пренебречь. Размеры, указанные на рисунке, равны: $L = 92$ см, $h = 65$ см. В верхнем положении ворота фиксируются защёлкой.

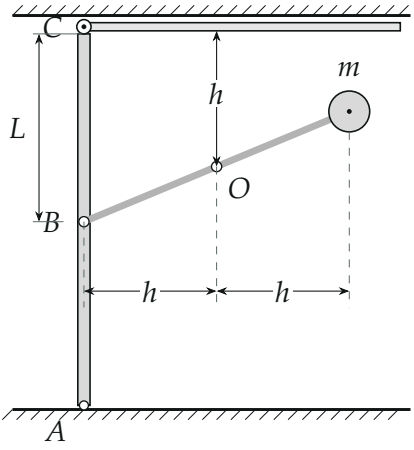


Рисунок организаторов (вид сбоку). Ворота закрыты, A — ручка, C — ролик в горизонтальной направляющей, O — ось коромысла, m — груз.

А. А1) Какую силу F_1, перпендикулярную воротам, необходимо прикладывать к ручке, чтобы удерживать ворота неподвижно при горизонтальном положении коромысла?

А2) Какую минимальную (!) силу F_2 необходимо прикладывать к ручке, чтобы ворота оставались неподвижными при горизонтальном положении коромысла?

В. Пусть при очень медленном подъёме ворот из начального вертикального положения в конечное горизонтальное к ручке в каждый момент времени прикладывается минимальная необходимая для подъёма сила. Чему равно максимальное значение $F_{\max}$ этой минимальной силы? Иначе говоря, каких минимальных мускульных усилий потребует от человека подъём ворот?

С. Если в верхнем положении открыть защёлку, то ворота начнут двигаться вниз, а коромысло — поворачиваться. Определите скорость груза в момент, когда ворота коснутся земли.

▲ **Решение. Что происходит.** Ворота — твёрдое тело, которое удерживают три внешних воздействия: ролик C на гладкой горизонтальной направляющей (сила $\vec{N}$ вертикальна: трения нет), шарнир B (сила $\vec{Q}$ со стороны коромысла, направление заранее неизвестно) и наша сила $\vec{F}$ в точке A. Груз — противовес: он уравновешивает почти весь вес ворот. Класс задачи — статика твёрдого тела. Неизвестных много (N, Q_1, Q_2), поэтому главный вопрос — относительно какой точки писать моменты, чтобы лишние неизвестные не вошли; ответ на него — ключ к части В.

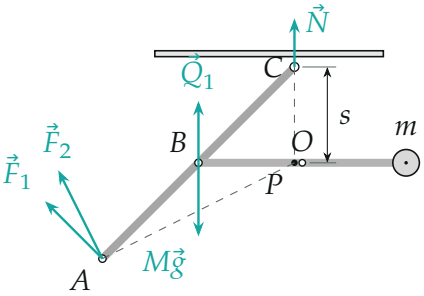
Обозначения. θ — угол ворот с вертикалью (ворота закрыты — $\theta = 0$, открыты — $\theta = 90°$); θ_c — угол коромысла с горизонталью; $\vec{Q}_1$ и $\vec{Q}_2$ — составляющие силы шарнира на ворота: перпендикулярная коромыслу и вдоль него; $g = 10$ м/с^2.

1. Коромысло. От B до O — h по горизонтали и $L - h$ по вертикали, от O до груза — столько же: плечи равны, $OB = Om = l$. Коромысло невесомо и находится в равновесии (ворота неподвижны), поэтому сумма моментов относительно оси O равна нулю. Составляющая Q_2 направлена вдоль коромысла и момента не даёт, остаются Q_1 и вес груза:

$$Q_1\, l = mg\, l \cos\theta_c \quad \Rightarrow \quad Q_1 = mg \cos\theta_c.$$

По третьему закону Ньютона это и сила коромысла на ворота в B; она направлена вверх — груз тянет шарнир, как противовес.

Часть А. Горизонтальное коромысло. Тогда $\theta_c = 0$ и $Q_1 = mg$, а точки B и O на одной высоте: $L\cos\theta = h$, $h/L = 0{,}71 \approx 1/\sqrt{2}$, то есть $\theta = 45°$. Обозначим $s = L/\sqrt{2}$.



Горизонтальное коромысло ($\theta = 45°$): силы на ворота; $\vec{F}_1 \perp$ воротам, $\vec{F}_2$ — минимальная; P — пересечение вертикали через C и прямой OB.

A1. Силы Q_2 и N неизвестны, но не нужны. Моменты относительно B уничтожают Q (она приложена в B) и вес. Остаются $\vec{N}$ и $\vec{F}_1$. Плечо $\vec{F}_1$ — вся длина L (сила перпендикулярна воротам, $AB = L$); плечо $\vec{N}$ — горизонтальное расстояние от C до B, то есть $L\sin\theta$. Моменты противоположны, значит, N направлена вверх — ворота «висят» на ролике:

$$N\,L\sin\theta = F_1 L \quad\Rightarrow\quad N = \frac{F_1}{\sin\theta} = \sqrt{2}\,F_1.$$

Теперь второй закон Ньютона в проекции на вертикаль (ворота неподвижны). Вертикальная составляющая $\vec{F}_1$ равна $F_1\cos\theta = F_1/\sqrt{2}$, вертикальны $\vec{N}$ и $\vec{Q}_1 = m\vec{g}$ (обе вверх), вес — вниз:

$$\sqrt{2}F_1 + \frac{F_1}{\sqrt{2}} + mg = Mg \quad\Rightarrow\quad F_1 = \frac{\sqrt{2}\,(M-m)g}{3} \approx 23{,}6\text{ Н}.$$

A2. Теперь сила $\vec{F}$ направлена под углом φ к воротам. Разложим её на составляющую вдоль ворот $F\cos\varphi$ (линия проходит через B, момента относительно B нет) и перпендикулярную $F\sin\varphi$. Момент относительно B даёт $N = \sqrt{2}F\sin\varphi$ — реакция направляющей зависит от F: поэтому

в А1 перпендикулярная сила не была минимальной. Вертикальная составляющая силы — $F(\cos\varphi + \sin\varphi)/\sqrt{2}$; с ней проекция на вертикаль $\sqrt{2}F\sin\varphi + F(\cos\varphi + \sin\varphi)/\sqrt{2} + mg = Mg$, то есть

$$F\,(\cos\varphi + 3\sin\varphi) = \sqrt{2}\,(M-m)g.$$

Скобку приведём к одному косинусу: $\cos\varphi + 3\sin\varphi = \sqrt{10}\,\cos(\varphi - \varphi_0)$, $\operatorname{tg}\varphi_0 = 3$ (поделили и умножили на $\sqrt{1^2+3^2}$). Сила минимальна, когда скобка максимальна, то есть $\varphi = \varphi_0$:

$$F_2 = \frac{\sqrt{2}\,(M-m)g}{\sqrt{10}} = \frac{(M-m)g}{\sqrt{5}} \approx 22{,}4\text{ Н}.$$

Эта сила перпендикулярна прямой PA (направление $(-1;2)$ против $(2;1)$ у PA) — запомним: это не случайность.

Часть В. Минимальная сила в каждом положении. Подъём медленный — в каждый момент равновесие; ищем наибольшую из минимальных сил, не перебирая φ при каждом θ.

Момент силы относительно точки P равен Fd, и плечо силы в A наибольшее, $d = PA$, при $\vec{F} \perp PA$; если прочие моменты от F не зависят, нужный момент даёт минимальная сила с наибольшим плечом. Мешала зависимость N от F: нужно выбрать точку, относительно которой моменты *обоих* неизвестных сил N и Q_2 равны нулю. Линия N — вертикаль через C, линия Q_2 — прямая OB; их пересечение — точка P.

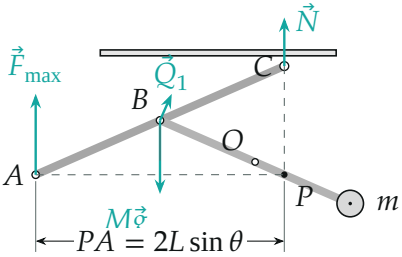
Моменты относительно P. Вес $M\vec{g}$ в B: плечо — расстояние от B до вертикали через P, оно равно $L\sin\theta$ (расстояние от B до вертикали через C). Сила $\vec{Q}_1$ в B перпендикулярна OB, а P лежит на прямой OB, поэтому её плечо — весь отрезок PB:

$$Q_1 \cdot PB = mg\cos\theta_c \cdot PB = mg \cdot L\sin\theta,$$

потому что $PB\cos\theta_c$ — горизонтальная проекция PB, то есть $L\sin\theta$. Вес вращает ворота вниз, Q_1 — вверх; $\vec{F}$ с плечом PA (при $\vec{F} \perp PA$) компен-

сирует разность:

$$F_{\min}(\theta)\cdot PA = (M-m)g\,L\sin\theta \quad\Rightarrow\quad F_{\min}(\theta) = (M-m)g\,\frac{L\sin\theta}{PA}.$$

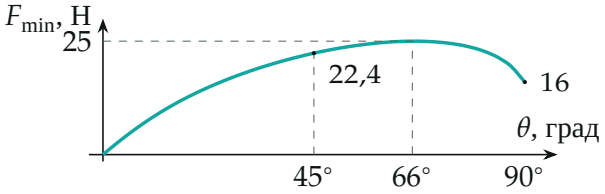


Положение $\theta^* \approx 66°$: точка P на одной высоте с A, PA горизонтальна, сила направлена вертикально. $\vec{N}$ и $\vec{Q}_2$ момента относительно P не дают. При $\theta = 45°$: $L\sin\theta = s$, $PA = s\sqrt{5}$ — снова $(M-m)g/\sqrt{5}$. Точка A отстоит от вертикали через C на $2L\sin\theta$, поэтому $PA \geq 2L\sin\theta$ (наклонная не короче проекции), и

$$F_{\min}(\theta) \leq \frac{(M-m)g}{2},$$

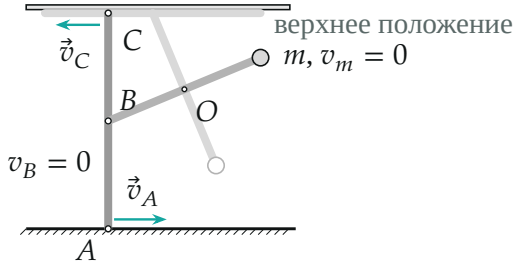
равенство — когда PA горизонтальна. Оно есть: при $\theta = 0$ точка $P = B$ выше A, при $\theta = 90°$ — ниже, и по непрерывности между ними (при $\theta^* \approx 66°$) они на одной высоте. Значит,

$$F_{\max} = \frac{(M-m)g}{2} = \frac{5\cdot 10}{2} = 25\text{ Н}.$$



$F_{\min}(\theta) = (M-m)gL\sin\theta/PA$ по точной геометрии: максимум 25 Н при $\theta \approx 66°$.

Часть С. Падение ворот. Трения нет, механическая энергия сохраняется. Ролик C едет по горизонтали, ворота вертикальны, поэтому скорость C перпендикулярна воротам. У твёрдого тела проекции скоростей двух точек на соединяющую их прямую равны (иначе расстояние между точками менялось бы): проекция скорости B на ворота равна проекции скорости C, то есть нулю. Но скорость B перпендикулярна коромыслу OB, а прямая OB не горизонтальна (O выше B), поэтому ненулевая скорость B имела бы составляющую вдоль ворот. Значит, $v_B = 0$: коромысло и груз на мгновение стоят, ворота вращаются вокруг неподвижной точки B.



Верхнее положение (светлое) и касание земли (тёмное): B на прежнем месте и неподвижна, ворота вращаются вокруг неё.

Изменение потенциальной энергии: центр ворот (B) опустился с $y_B = 2L$ до L, груз поднялся на L (плечи равны, $y_m = 2y_O - y_B$): $-\Delta U = (M-m)gL = 46$ Дж. Кинетическая энергия — вращение вокруг B; кусочек dx массы $M\,dx/(2L)$ движется со скоростью ωx, так что $E_k = \frac{\omega^2}{2}\int_{-L}^{L}\frac{M}{2L}x^2dx = \frac{ML^2\omega^2}{6}$. Закон сохранения энергии $ML^2\omega^2/6 = (M-m)gL$ даёт

$$v_A = \omega L = \sqrt{6(M-m)gL/M} \approx 3{,}0 \text{ м/с}.$$

Скорость груза $v_m = 0$ (организаторы в ответе дают v_A).

Проверка. При $m \to M$ ворота уравновешены, $v_A \to 0$. Принцип виртуальных перемещений (груз вычитает m из M) даёт то же $F_{\min}PA = (M-m)gL\sin\theta$.

Ответ. А1) $F_1 = \sqrt{2}\,(M-m)g/3 \approx 23{,}6$ Н; А2) $F_2 = (M-m)g/\sqrt{5} \approx 22{,}4$ Н; Б) $F_{\max} = (M-m)g/2 = 25$ Н; С) скорость груза $v_m = 0$; скорость нижней точки ворот $v_A = \sqrt{6(M-m)gL/M} \approx 3{,}0$ м/с.