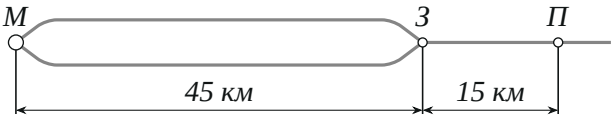
Обычные и «Ласточки»

Задача 1. [МОШ 2020/21, 7 класс, задача 1] На железнодорожной ветке, связывающей город М с областным центром Т, есть (кроме прочих) остановки в городке З и посёлке П. От М до З проложены два пути для движения поездов в направлении Т, а от З до П — один путь (см. рисунок). Расстояние от М до З равно 45 км, а от З до П — 15 км. Начиная с 17:00 и до 21:00 от М в направлении Т каждые пятнадцать минут отправляются скоростные электропоезда «Ласточка», которые останавливаются в З, но не останавливаются в П, а также хотя бы раз в час отправляются обычные электрички, останавливающиеся и в З, и в П. Ласточки движутся со средней скоростью 120 км/ч, а обычные электрички — со средней скоростью 45 км/ч. На пути от М до З Ласточки и обычные электрички движутся по разным путям, не мешая друг другу. Электричка не отправляется из З, если на пути до П её может догнать Ласточка, выжидая в З удобного момента для отправления (так, чтобы можно было доехать до П, не мешая Ласточкам). Можно считать, что посадка, высадка и пересадка пассажиров с одного электропоезда на другой на остановках происходит за пренебрежимо малое время.



1. За какое минимальное время можно доехать до посёлка П по железной дороге, отправившись из М в интервале времени от 18:00 до 19:00 включительно, в случае наиболее удобного для этого расписания электричек?
2. В какое время (часов, минут) в интервале от 18:00 до 18:30 включительно следует назначить отправление электричек от М, чтобы они приходили в П, не задерживаясь в З? Укажите все возможные значения.

▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на движение по графику (расписанию). Ласточки идут строго через 15 минут; от З до П путь один,

и электричка может выйти туда только в «окно», когда её не догонит следующая Ласточка. Найдём времена в пути, затем окно в З, затем выберем самый быстрый маршрут (на Ласточке до З, дальше на электричке) и подберём под окно время отправления электрички из М. Удобнее всего всё нарисовать на графике «время — расстояние»: поезд там — ломаная, догнать — значит пересечься.

Обозначения. s — момент отправления Ласточки из З, e — момент отправления электрички из З, d — момент отправления электрички из М; время — в минутах.

1. Время в пути. Время = расстояние / скорость:

$$\text{Ласточка:}\quad \text{М}\to\text{З}:\ \frac{45}{120}\text{ ч} = 22{,}5\text{ мин},\qquad \text{З}\to\text{П}:\ \frac{15}{120}\text{ ч} = 7{,}5\text{ мин};$$

$$\text{электричка:}\quad \text{М}\to\text{З}:\ \frac{45}{45}\text{ ч} = 60\text{ мин},\qquad \text{З}\to\text{П}:\ \frac{15}{45}\text{ ч} = 20\text{ мин}.$$

Ласточки уходят из М в 17:00, 17:15, …, значит, из З — в s = … :07,5; :22,5; :37,5; :52,5 каждого часа (стоянка мгновенная).

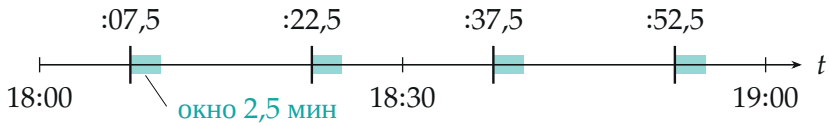
2. Окно отправления из З. Электричка вышла из З в момент e и придёт в П в $e+20$. Ласточка, вышедшая из З раньше неё, быстрее и уходит вперёд — она не мешает. Ласточка, вышедшая позже, в момент $s > e$, будет в П в $s + 7{,}5$; она не догонит электричку до П, если придёт туда не раньше электрички:

$$s + 7{,}5 \ \geq\ e + 20 \quad\Rightarrow\quad s \ \geq\ e + 12{,}5.$$

Ближайшая следующая Ласточка уходит не позже чем через 15 мин после предыдущей, поэтому если электричка вышла сразу за Ласточкой s_k, то $e \leq s_{k+1} - 12{,}5 = s_k + 2{,}5$. Окно:

$$s_k \ \leq\ e \ \leq\ s_k + 2{,}5\text{ мин},$$

то есть электричка может выйти из З в течение 2,5 минут после очередной Ласточки — в … :07,5–:10, :22,5–:25, :37,5–:40, :52,5–:55.



Моменты отправления Ласточек из З (риски) и окна для электрички (бирюзовые отрезки по 2,5 мин).

3. Пункт 2: отправление из М без задержки в З. Электричка без задержки — значит, она приходит в З прямо в окно и сразу уходит: $e = d + 60$ мин. Условие $s_k \le d + 60 \le s_k + 2{,}5$ на интервале 18:00–18:30 даёт

$$18{:}07{,}5 \le d \le 18{:}10 \qquad \text{и} \qquad 18{:}22{,}5 \le d \le 18{:}25.$$

В часах и минутах: 18:07:30–18:10 и 18:22:30–18:25; если расписание назначают в целых минутах — 18:08, 18:09, 18:10 и 18:23, 18:24, 18:25.

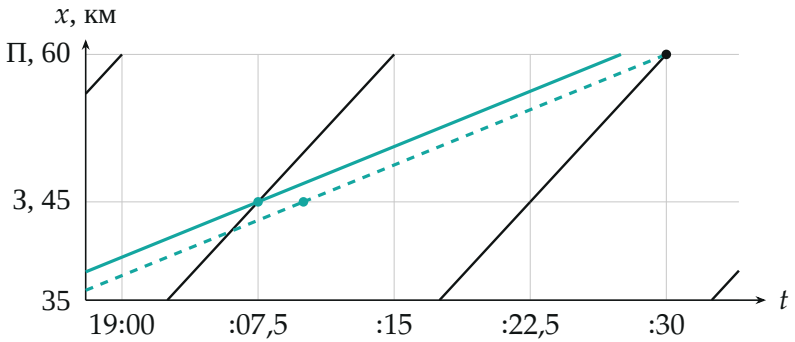
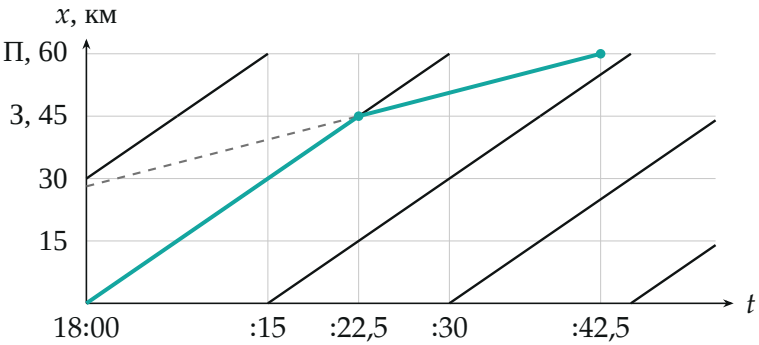


График «время — расстояние» на участке З–П для крайних электричек пункта 2 (из М в 18:07:30 и 18:10). Чёрные ломаные — Ласточки. Электричка 18:10 приходит в П одновременно с проходом Ласточки, которая вышла из З в 19:22:30 — это граница окна.

4. Пункт 1: самая быстрая поездка. Электричка всюду медленнее Ласточки, поэтому до З выгодно ехать на Ласточке (22,5 мин), а от З до П — только электричкой (20 мин, Ласточка в П не останавливается). Меньше чем $22{,}5 + 20 = 42{,}5$ мин не получится. Этого можно добиться:

сядем в М на Ласточку в 18:00, в 18:22,5 она в 3; при «удобном» расписании в этот же момент в 3 стоит электричка (вышла из М в 17:22,5, это время попадает в окно шага 3: 17:22,5 + 60 = 18:22,5 = s_k). Пересадка мгновенная, электричка выходит сразу за Ласточкой — в самом начале окна — и в 18:42,5 приходит в П. Следующая Ласточка (из 3 в 18:37,5) проходит П в 18:45, позже электрички, — никто никому не мешает.

$$t_{\min} = 22{,}5 + 20 = 42{,}5 \text{ мин.}$$



Самая быстрая поездка (бирюзовая ломаная): Ласточка из М в 18:00, *в 3 пересадка на электричку, П в* 18:42:30. *Штриховая — та же электричка до пересадки.*

Обратите внимание. Окно в 3 определяется не Ласточкой, которая уходит вместе с электричкой (она уходит вперёд), а *следующей*: она через 15 мин стартует в погоню и должна прийти в П не раньше электрички. Отсюда и ширина окна 15 − 12,5 = 2,5 мин. У организаторов в ответе на пункт 1 стоит 44,5 мин; при мгновенной пересадке и электричке, выходящей сразу за Ласточкой (это допускает окно, на котором построен их же ответ на пункт 2), время в пути 42,5 мин.

Ответ. 1) $t_{\min} = t_{Л}(МЗ) + t_{э}(ЗП) = 22{,}5 + 20 = 42{,}5$ мин; 2) от 18:07:30 до 18:10 и от 18:22:30 до 18:25.

Проверка. Граница окна $e = s_k + 2{,}5$: электричка в П в $s_k + 22{,}5$, следующая Ласточка в П в $s_k + 15 + 7{,}5 = s_k + 22{,}5$ — ровно одновременно, догнать «на пути» не успевает. При $e = s_k + 3$ Ласточка оказалась бы

в П на полминуты раньше электрички — догнала бы её. Второй способ для пункта 1: на графике «время — расстояние» маршрут не может идти круче линий Ласточки до 3 и круче линии электрички после 3, а именно такой маршрут нарисован.

Смысл: однопутный участок пропускает электричку только в короткое окно за Ласточкой; удобное расписание — такое, при котором электричка приходит в 3 прямо к этому окну.

Ответ. 1) 42,5 мин; 2) 18:07:30–18:10 и 18:22:30–18:25 (в целых минутах: 18:08–18:10 и 18:23–18:25).