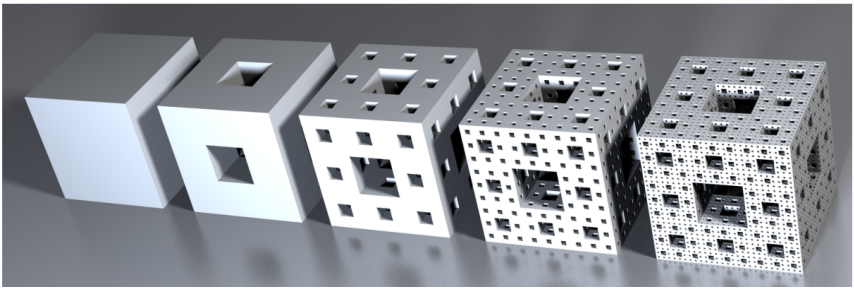
Губка Менгера

Задача 2. [МОШ 2020/21, 7 класс, задача 2] Ниже вы видите компьютерный рисунок из «Википедии» (автор: Niabot), на котором изображены первые итерации построения фрактала под названием «Губка Менгера». На первой итерации в кубе делают три сквозных отверстия квадратного сечения. Оси отверстий взаимно перпендикулярны, перпендикулярны граням куба и проходят через середины граней. Длина стороны квадрата, лежащего в сечении отверстия, равна $\frac{1}{3}$ длины стороны грани куба. На второй итерации подобные отверстия проделывают в маленьких кубиках, образовавшихся на гранях большого куба и так далее.



Пусть имеется заготовка в виде куба с длиной стороны 1 м, изготовленная из пластика плотностью 1000 кг/м^3, а также устройство, при помощи которого можно делать в этой заготовке отверстия квадратного сечения сколь угодно малого размера. Из куба решили изготовить n-ую итерацию губки Менгера.

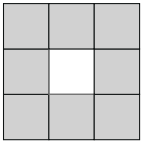
1. Чему равна средняя плотность куба на четвёртой итерации (последний кубик на рисунке)?
2. Представим себе, что образующиеся на n-ой итерации полости заполняют пластиком плотностью 2000 кг/м^3. Чему может быть равна средняя плотность куба на n-ой ($n \geq 0$) итерации? В ответе укажите границы диапазона возможных значений плотности.
3. Нам не нравится, что губка белая. Решили покрасить все грани губки на второй итерации (в том числе все внутренние) синей

краской, расход которой составляет 100 г/м^2. Хватит ли одной банки, содержащей 1 кг краски, для этого? А двух банок?

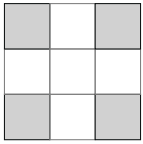
▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на среднюю плотность: $\rho_{\text{ср}} = m/V$, где V — объём всего куба (вместе с дырками), а m — масса оставшегося пластика. Главная идея — самоподобие: на каждой итерации с каждым кубиком делают одно и то же, поэтому каждая итерация уменьшает объём пластика в одно и то же число раз. С площадью поверхности так же: вторая итерация — это 20 копий первой, только уменьшенных и склеенных.

Обозначения. $a = 1$ м — сторона куба; V_n — объём пластика после n-й итерации; $\rho_0 = 1000$ кг/м^3, $\rho_1 = 2000$ кг/м^3; A_n — площадь поверхности губки n-й итерации; $q = 100$ г/м^2 — расход краски.

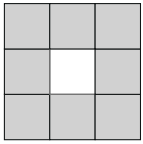
1. Сколько остаётся после одной итерации. Разрежем куб на $3 \times 3 \times 3 = 27$ одинаковых кубиков. Три сквозных отверстия убирают центральный кубик и шесть кубиков в центрах граней — всего 7, остаётся 20 (рисунок по слоям).



низ: 8



середина: 4



верх: 8

Первая итерация по слоям (вид сверху): серые кубики остаются. $8+4+8 = 20$ *кубиков из* 27.

Значит, после одной итерации остаётся доля $\dfrac{20}{27}$ объёма. Каждая следующая итерация делает то же самое с каждым из оставшихся кубиков, и снова остаётся $\dfrac{20}{27}$ от того, что было:

$$V_n = \left(\frac{20}{27}\right)^n a^3.$$

2. Пункт 1: четвёртая итерация. Масса пластика $m_4 = \rho_0 V_4$, объём

куба a^3 (дырки входят в объём куба). Средняя плотность

$$\rho_4 = \frac{\rho_0 V_4}{a^3} = \rho_0 \left(\frac{20}{27}\right)^4 = 1000 \cdot \frac{160\,000}{531\,441} \frac{\text{кг}}{\text{м}^3} \approx 301 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}.$$

Губка четвёртой итерации в три с лишним раза легче сплошного куба.

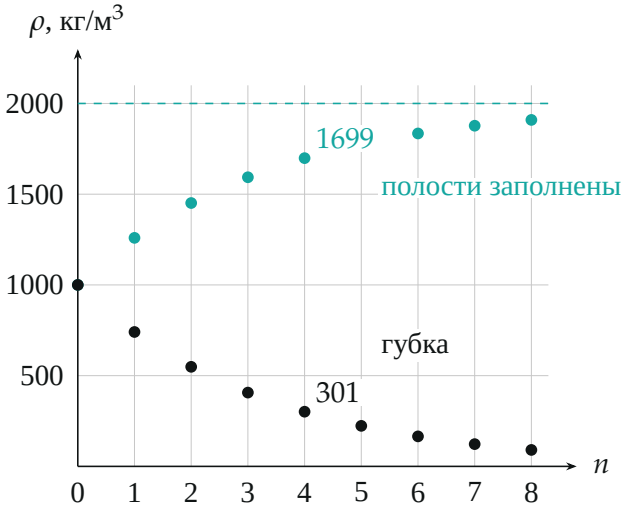
3. Пункт 2: полости залиты тяжёлым пластиком. Теперь в кубе объём V_n лёгкого пластика и объём $a^3 - V_n$ тяжёлого. Средняя плотность — полная масса, делённая на объём куба:

$$\rho'_n = \frac{\rho_0 V_n + \rho_1 (a^3 - V_n)}{a^3} = \rho_1 - (\rho_1 - \rho_0)\left(\frac{20}{27}\right)^n,$$

$$\rho'_n = 2000 - 1000\left(\frac{20}{27}\right)^n \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}.$$

При $n = 0$ (куб без отверстий) $\rho'_0 = 1000$ кг/м^3; с ростом n множитель $(20/27)^n$ уменьшается, но нулём не становится ни при каком n, поэтому плотность растёт и приближается к 2000 кг/м^3, не достигая её:

$$1000 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3} \leq \rho'_n < 2000 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}.$$

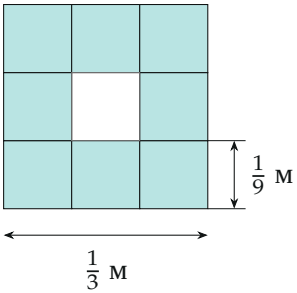


Средняя плотность губки (чёрные точки, $\rho_0(20/27)^n$) и губки с залитыми полостями (бирюзовые, $2000-1000(20/27)^n$); штриховая — предел 2000 кг/м³, который не достигается.

4. Пункт 3: площадь первой итерации. Считаем в квадратиках. У сплошного куба $A_0 = 6$ м². Первая итерация — 20 кубиков со стороной $\frac{1}{3}$ м, у каждого 6 граней площадью $\frac{1}{9}$ м²: всего 120 граней. Но соседние кубики прилегают друг к другу, и прилегающие грани не видны и не красятся. Пар соседей 24: каждый из 12 рёберных кубиков касается двух угловых (рисунок слоёв). В каждой паре прячутся две грани, всего 48. Остаётся $120 - 48 = 72$ грани:

$$A_1 = 72 \cdot \frac{1}{9}\ \text{м}^2 = 8\ \text{м}^2.$$

5. Площадь второй итерации. Вторая итерация — это те же 20 кубиков, но каждый превращён в губку первой итерации со стороной $\frac{1}{3}$ м. Площадь подобной фигуры в 3 раза меньших размеров в $3^2 = 9$ раз меньше: у каждой маленькой губки $\frac{A_1}{9} = \frac{8}{9}$ м². Склеены они по тем же 24 парам, но теперь прилегающая грань маленькой губки — не сплошной квадрат, а квадрат с дыркой: 8 квадратиков со стороной $\frac{1}{9}$ м (рисунок), площадь $8 \cdot \frac{1}{81} = \frac{8}{81}$ м².



Грань губки первой итерации со стороной $\frac{1}{3}$ м: по ней маленькие губки прилегают друг к другу на второй итерации (центр — сквозная дыра).

В каждой паре прячутся две такие грани:

$$A_2 = 20 \cdot \frac{8}{9} - 24 \cdot 2 \cdot \frac{8}{81} = \frac{1440 - 384}{81}\ \text{м}^2 = \frac{1056}{81}\ \text{м}^2 \approx 13{,}0\ \text{м}^2.$$

Проверка той же формулой для первой итерации (копии — сплошные кубики с площадью $\frac{6}{9}$ м^2, прячутся целые грани по $\frac{1}{9}$ м^2):

$$A_1 = 20 \cdot \frac{6}{9} - 48 \cdot \frac{1}{9} = \frac{120 - 48}{9}\ \text{м}^2 = 8\ \text{м}^2,$$

совпало с шагом 4.

6. Краска. Масса краски

$$m_{\text{кр}} = qA_2 = 0{,}1\ \frac{\text{кг}}{\text{м}^2} \cdot 13{,}04\ \text{м}^2 \approx 1{,}3\ \text{кг}.$$

Одной банки (1 кг) не хватит, двух (2 кг) хватит с запасом.

Обратите внимание. Плотность губки считается по объёму *всего куба*: дырки входят в объём, но не в массу. А при подсчёте площади нельзя складывать поверхности кубиков: грани, которыми кубики прилегают друг к другу, не красятся.

Ответ. 1) $\rho_4 = \rho_0\,(20/27)^4 \approx 301$ кг/м^3; 2) $\rho'_n = 2000 - 1000\,(20/27)^n$, то есть 1000 кг/м^3 $\le \rho'_n <$ 2000 кг/м^3; 3) $A_2 = 1056/81 \approx 13$ м^2, нужно $\approx 1{,}3$ кг краски: одной банки не хватит, двух хватит.

Проверка. Площадь второй итерации проверена прямым подсчётом на компьютере: куб $9 \times 9 \times 9$ маленьких кубиков, 400 оставшихся, открытых граней 1056 — то же число. Предел: при $n \to \infty$ объём губки стремится к нулю ($\rho_n \to 0$), а площадь растёт — у фрактала огромная поверхность при почти нулевом объёме.

Смысл: каждая итерация уменьшает массу в $27/20$ раза и увеличивает поверхность, поэтому губку легко сделать лёгкой, но трудно покрасить.

Ответ. 1) ≈ 301 кг/м^3 (в пределах 300 ± 1 кг/м^3); 2) 1000 кг/м^3 $\le \rho_n <$ 2000 кг/м^3; 3) одной банки не хватит, а двух хватит (нужно $\approx 1{,}3$ кг, площадь ≈ 13 м^2).