Погрешность плотности

Задача 4. [МОШ 2020/21, 7 класс, задача 4] В распоряжении школьника имеются рычажные весы, предназначенные для измерения массы с точностью до 10 мг, три гири массой: 100 г, 20 г и 5 г, пластиковый кубик и линейка. Длины сторон кубика измерили линейкой и определили его объём, получилось значение $V = 100\ \text{см}^3 \pm 5\ \text{см}^3$. Считается, что чашечные весы, измеряющие массу с точностью 10 мг, уравновешены, если разность масс тел, находящихся на чашах, меньше 10 мг. Предполагается, что массы гирь определены с очень высокой точностью.

С помощью данного оборудования школьник определил среднюю плотность кубика с максимально возможной точностью, а после рассчитал относительную погрешность полученного результата. Какое наименьшее и наибольшее значение относительной погрешности он мог получить, если известно, что масса кубика точно больше 100 г, но меньше 125 г?

Указание. Если в результате измерений удалось определить, что измеряемая величина x лежит в пределах диапазона: $x_{\min} < x < x_{\max}$, то относительная погрешность измерения может быть оценена по формуле

$$\delta x = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{x_{\max} + x_{\min}}.$$

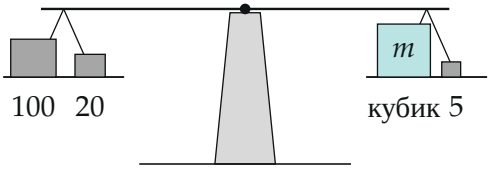
▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на погрешность косвенного измерения. Плотность $\rho = m/V$ знаем с той точностью, с какой знаем массу и объём. Объём известен с относительной погрешностью 5 % всегда. А вот масса — по-разному: тремя гирями можно точно уравновесить только несколько значений массы. Если масса кубика совпала с одним из них (с точностью 10 мг) — массу знаем почти точно, если попала между ними — знаем только, в какой «щели» она лежит. Наименьшая погрешность плотности — при «удачной» массе, наибольшая — при массе в самой широкой щели.

Обозначения. m — масса кубика; V — его объём, $V_{\min} = 95\ \text{см}^3$, $V_{\max} = 105\ \text{см}^3$; δm, δV, $\delta\rho$ — относительные погрешности по формуле из указания.

1. Какие массы можно уравновесить. Гири можно ставить на обе чаши: гиря на чаше с кубиком вычитается. Массы из интервала 100–125 г, которые можно составить из гирь 100, 20 и 5 г:

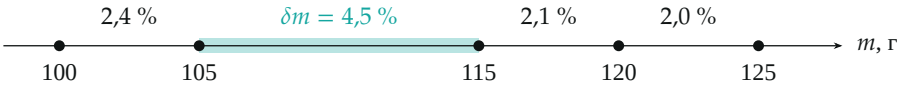
$$100, \qquad 100 + 5 = 105, \qquad 100 + 20 - 5 = 115,$$
$$100 + 20 = 120, \qquad 100 + 20 + 5 = 125 \text{ г}.$$

Других нет: 110 г не составить (для этого нужны две пятёрки).



Как уравновесить 115 г: на одной чаше гири 100 и 20 г, на другой — кубик и гиря 5 г.

Если кубик тяжелее набора 105 г, весы покажут это (перевес больше 10 мг), если легче набора 115 г — тоже. Так для любой массы между «точками» мы узнаём, в какой щели она лежит.



Массы, которые уравновешиваются набором гирь (точки), и щели между ними. Самая широкая щель — от 105 до 115 г.

2. Погрешность массы. Если весы уравновешены набором M (то есть $|m - M| < 10$ мг), то $M - 0{,}01 < m < M + 0{,}01$ г и

$$\delta m = \frac{0{,}02}{2M} = \frac{0{,}01}{M} \approx 0{,}01\ \% \quad (\text{при } M \approx 100\text{–}125 \text{ г}) \text{ — ничтожно.}$$

Если масса в щели $105 < m < 115$ г (уравновесить нельзя), то

$$\delta m = \frac{115 - 105}{115 + 105} = \frac{10}{220} \approx 4{,}5\ \%;$$

в остальных щелях (по 5 г) δm около 2,0–2,4 %.

3. Погрешность плотности. Плотность наименьшая, когда масса наименьшая, а объём наибольший, и наоборот:

$$\rho_{\min} = \frac{m_{\min}}{V_{\max}}, \qquad \rho_{\max} = \frac{m_{\max}}{V_{\min}}.$$

Подставим в формулу из указания.

Наибольшая погрешность — масса в щели 105–115 г:

$$\rho_{\min} = \frac{105}{105} = 1{,}000\ \frac{\text{г}}{\text{см}^3}, \qquad \rho_{\max} = \frac{115}{95} = 1{,}211\ \frac{\text{г}}{\text{см}^3},$$

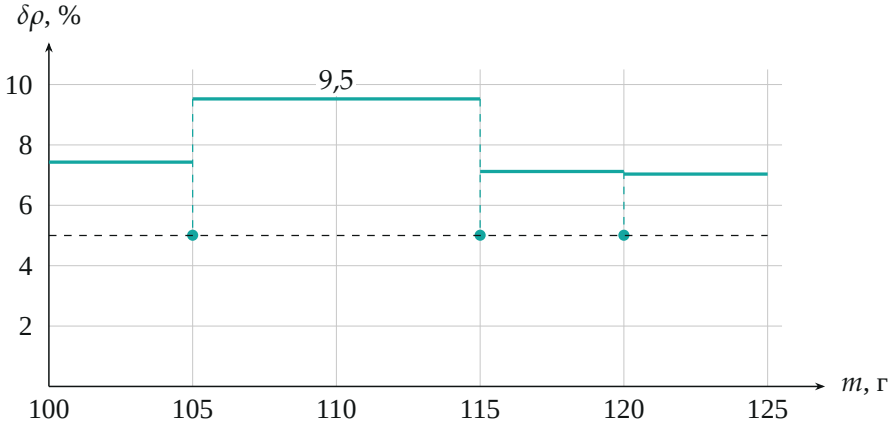
$$\delta\rho = \frac{1{,}211 - 1{,}000}{1{,}211 + 1{,}000} \approx 9{,}5\ \%.$$

Наименьшая — масса уравновешена набором, например $M = 120$ г:

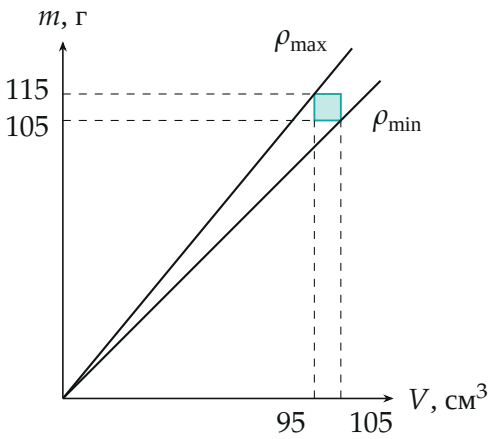
$$\delta\rho = \frac{\frac{120{,}01}{95} - \frac{119{,}99}{105}}{\frac{120{,}01}{95} + \frac{119{,}99}{105}} \approx 5{,}0\ \%,$$

то есть погрешность плотности почти целиком — погрешность объёма $\delta V = \dfrac{105 - 95}{105 + 95} = 5\ \%$.

При малых погрешностях это видно и проще: относительные погрешности частного складываются, $\delta\rho \approx \delta m + \delta V$: 0,01 % + 5 % ≈ 5 % и 4,5 % + 5 % = 9,5 %.



Погрешность плотности в зависимости от массы кубика (расчёт по формуле указания): ступеньки в щелях, провалы до 5 % в уравновешиваемых точках.



Плотность — наклон прямой из начала координат на плоскости V–m. Прямоугольник — возможные (V, m) при массе в щели 105–115 г; крайние наклоны дают ρ_{min} и ρ_{max}.

Обратите внимание. Погрешность массы определяется не точностью весов (10 мг), а набором гирь: весы точны, но уравновесить ими можно только пять значений массы. Поэтому при «неудачной» массе её погрешность в сотни раз больше, чем чувствительность весов.

Ответ. $\delta\rho_{\min} \approx \delta V = \dfrac{V_{\max} - V_{\min}}{V_{\max} + V_{\min}} = 5\ \%$; $\delta\rho_{\max} = \dfrac{\rho_{\max} - \rho_{\min}}{\rho_{\max} + \rho_{\min}} \approx 9{,}5\ \%$ при $105 < m < 115$ г.

Проверка. Предел: при идеально известном объёме ($\delta V \to 0$) наибольшая погрешность была бы $\delta m = 4{,}5\ \%$, наименьшая — $0{,}01\ \%$, как и должно быть. Сумма $\delta m + \delta V = 9{,}55\ \%$ совпадает с точным расчётом $9{,}52\ \%$.

Смысл: точность косвенного измерения ограничена самым грубым прибором; здесь это линейка, а при неудачной массе — ещё и набор гирь.

Ответ. Наименьшее $\approx 5\ \%$, наибольшее $\approx 9{,}5\ \%$.