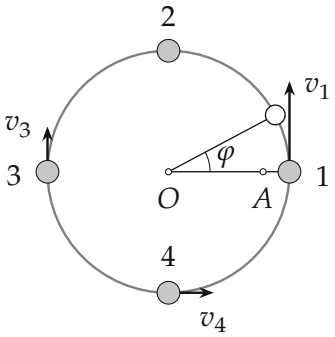
Кольцо с бусами

Задача 1. [МОШ 2020/21, 8 класс, задача 1] Известно, что упругие бусинки одинаковой массы, насаженные на горизонтальную спицу, по которой они могут скользить без трения, в процессе столкновения обмениваются скоростями, что схематично иллюстрирует рисунок ниже.



Пусть на гладкое, расположенное в горизонтальной плоскости кольцо радиусом 1 м, насажены 4 упругие бусинки одинаковой массы (рис. ниже). Положение любой бусинки в любой момент времени определяется углом φ, который отсчитывается от линии OA против часовой стрелки и может принимать значения от $0°$ до $360°$. В нулевой момент времени углы, задающие положение бусинок на кольце, равны: $\varphi_1(0) = 0$, $\varphi_2(0) = 90°$, $\varphi_3(0) = 180°$ и $\varphi_4(0) = 270°$. Скорости бусинок в нулевой момент равны: $v_1 = 2\pi$ м/с, $v_2 = 0$, $v_3 = \pi$ м/с, $v_4 = \pi$ м/с и направлены так, как показано на рисунке.



А. А1) Если бы второй и четвёртой бусинок не было, то как выглядел бы график зависимости угла $\varphi_3(t)$, определяющего положение третьей бусинки, от времени для первых двух секунд движения? (1 балл)

A2) Изобразите график зависимости угла $\varphi_2(t)$, определяющего положение второй бусинки, от времени для первых двух секунд движения (на кольце четыре бусинки). (3 балла)

B. В какой точке кольца будет находиться через 2 секунды после начала движения первая бусинка? Сколько столкновений она испытает за это время? (2 балла)

C. Верно ли, что углы, характеризующие положение бусинок, а также скорости бусинок через некоторое время T будут такими же, как в начальный момент? Если да, то найдите время T. (5 баллов)

▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на упругие столкновения одинаковых тел с приёмом «скорости живут своей жизнью». Раз при ударе бусинки просто обмениваются скоростями, картина движения на кольце в каждый момент такая же, как если бы бусинки *проходили друг сквозь друга*, не замечая столкновения: меняются только номера. Будем следить не за бусинками, а за четырьмя «скоростями» — точками, которые равномерно бегут по кольцу каждая со своей угловой скоростью (назовём их призраками). Бусинки в каждый момент стоят там же, где призраки, а их порядок по кольцу сохраняется: обогнать друг друга бусинки не могут.

Обозначения. $R = 1$ м — радиус кольца; $\omega = v/R$ — угловая скорость бусинки, положительная против часовой стрелки; $\varphi_k(t)$ — угол k-й бусинки; a, b, c, d — призраки, стартующие из 0°, 90°, 180°, 270°.

1. Угловые скорости. Угол поворота за время t на кольце радиусом R равен дуге, делённой на радиус: $\omega = v/R$. Направления — по рисунку: бусинка 1 движется вверх, то есть против часовой стрелки; бусинка 3 в левой точке движется вверх — по часовой стрелке; бусинка 4 в нижней точке движется вправо — против часовой стрелки:

$$\omega_1 = \frac{2\pi \text{ м/с}}{1 \text{ м}} = 2\pi \frac{\text{рад}}{\text{с}} = 360^\circ/\text{с}, \qquad \omega_2 = 0,$$
$$\omega_3 = -180^\circ/\text{с}, \qquad \omega_4 = +180^\circ/\text{с}.$$

Призраки движутся без столкновений:

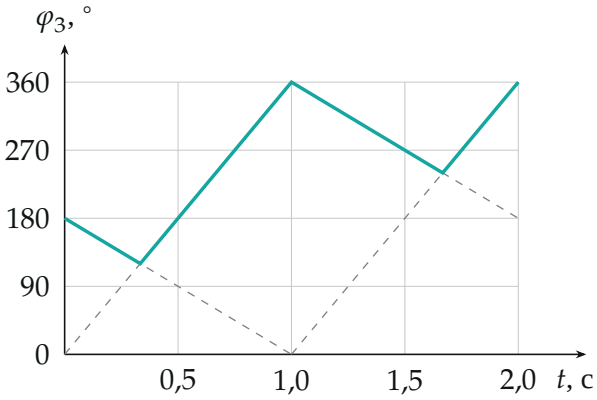
$$\varphi_a = 360°t, \quad \varphi_b = 90°, \quad \varphi_c = 180° - 180°t, \quad \varphi_d = 270° + 180°t$$

(углы берём по модулю 360°: дойдя до 360°, призрак продолжает от 0°).



После удара (слева) точки, где находятся бусинки, и скорости в этих точках те же, что и в случае, когда бусинки прошли бы друг сквозь друга (справа). Отличаются только номера.

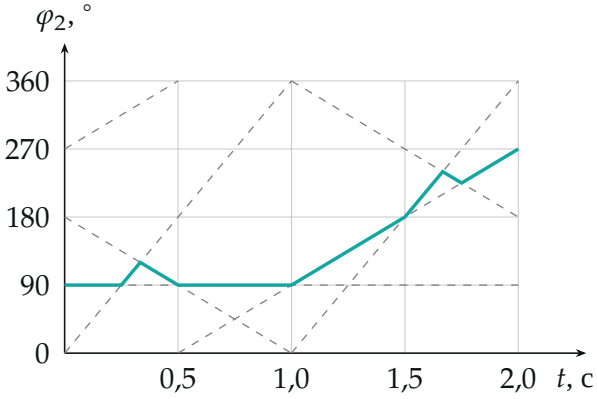
2. Пункт А1: две бусинки. Остаются призраки *a* (бусинка 1) и *c* (бусинка 3). Встречаются они, когда $360°t = 180° - 180°t$, то есть при $t_1 = \frac{1}{3}$ с в точке 120°. Бусинка 3 до удара шла назад, после удара получает скорость $+360°/\text{с}$ и идёт по линии призрака *a*: от 120° до 360° за $\frac{240}{360} = \frac{2}{3}$ с, то есть к моменту $t = 1$ с. В тот же момент в эту точку ($0° = 360°$) приходит бусинка 1 (призрак *c* доходит до 0° при $t = 1$ с), и снова удар: бусинка 3 возвращает себе скорость $-180°/\text{с}$ и идёт от 360° вниз. Третья встреча: $360°(t-1) = 360° - 180°(t-1)$, $t = \frac{5}{3}$ с, угол 240°; после неё бусинка 3 со скоростью $+360°/\text{с}$ к $t = 2$ с снова доходит до 360°.



Пункт A1: $\varphi_3(t)$ (бирюзовая ломаная) при двух бусинках. Штриховые прямые — призраки a и c: бусинка всё время идёт по одному из них и переходит на другой в точках встречи.

3. Пункт A2: четыре бусинки. Теперь на графике четыре семейства прямых-призраков. Бусинки занимают те же точки, что и призраки, и сохраняют порядок по кольцу: против часовой стрелки — $1, 2, 3, 4$. Поэтому бусинка 2 в каждый момент идёт по тому призраку, который стоит вторым после бусинки 1. Переход с прямой на прямую — в точках пересечения прямых (это и есть удары). Выпишем удары бусинки 2 (времена — из равенства углов призраков, как в шаге 2):

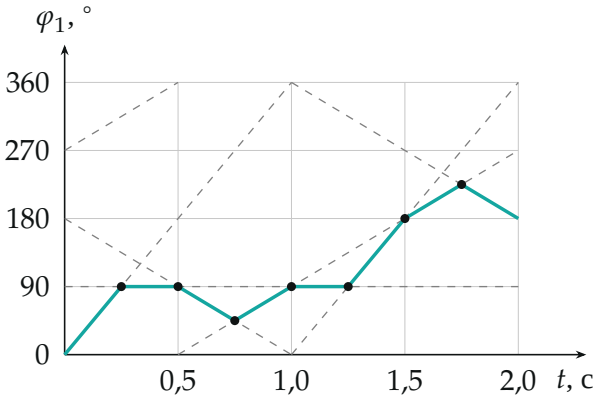
- $0 < t < \frac{1}{4}$ с: стоит в 90° (призрак b); при $t = \frac{1}{4}$ с в неё попадает бусинка 1 (a догоняет b);
- $\frac{1}{4} < t < \frac{1}{3}$: идёт со скоростью $+360°/\text{с}$ до 120°, где встречает бусинку 3 (a и c);
- $\frac{1}{3} < t < \frac{1}{2}$: идёт назад со скоростью $-180°/\text{с}$ и в 90° снова бьёт бусинку 1, которая там стоит;
- $\frac{1}{2} < t < 1$: стоит в 90°; при $t = 1$ с в эту точку приходят сразу призраки b и d;
- $1 < t < \frac{3}{2}$: $+180°/\text{с}$ до 180°; при $t = \frac{3}{2}$ с её догоняет бусинка 1;
- $\frac{3}{2} < t < \frac{5}{3}$: $+360°/\text{с}$ до 240°, удар с бусинкой 4, идущей навстречу (призраки a и c);
- $\frac{5}{3} < t < \frac{7}{4}$: $-180°/\text{с}$ до 225°, удар с бусинкой 1;
- $\frac{7}{4} < t < 2$: $+180°/\text{с}$, к $t = 2$ с приходит в 270°.



Пункт A2: $\varphi_2(t)$ (бирюзовая ломаная). Штриховые прямые — четыре призрака; все изломы графика лежат на их пересечениях.

Ломаная построена по вычисленным точкам $(t;\varphi_2)$: $(0;90°)$, $(\frac{1}{4};90°)$, $(\frac{1}{3};120°)$, $(\frac{1}{2};90°)$, $(1;90°)$, $(\frac{3}{2};180°)$, $(\frac{5}{3};240°)$, $(\frac{7}{4};225°)$, $(2;270°)$; их проверили и прямым пошаговым расчётом ударов (программа на python).

4. Пункт B: первая бусинка за 2 с. Так же по графику призраков строим $\varphi_1(t)$: бусинка 1 всё время стоит перед бусинкой 4 и за бусинкой 2.



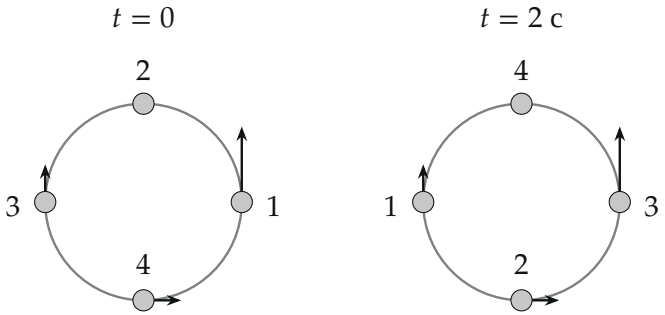
$\varphi_1(t)$ за первые 2 с. Точки — удары первой бусинки: их 7.

Удары первой бусинки происходят при $t = \frac{1}{4};\ \frac{1}{2};\ \frac{3}{4};\ 1;\ \frac{5}{4};\ \frac{3}{2};\ \frac{7}{4}$ с — семь штук (в момент $t = 2$ с удара нет). При $t = 2$ с бусинка 1 приходит в точку $\varphi_1 = 180°$ — туда, где в начале была бусинка 3.

Проверка через призраков: при $t = 2$ с

$$\varphi_a = 720° \to 0°, \quad \varphi_b = 90°, \quad \varphi_c = -180° \to 180°, \quad \varphi_d = 630° \to 270°.$$

Точки заняты те же, что в начале, и в каждой — та же скорость. Порядок бусинок 1, 2, 3, 4 по кольцу сохранился, а бусинка 1 стоит в 180°; значит, все бусинки сдвинулись ровно на два места: $\varphi_1 = 180°$, $\varphi_2 = 270°$, $\varphi_3 = 0°$, $\varphi_4 = 90°$.



Расстановка бусинок в начале и через 2 с: точки и скорости в них те же, номера сдвинуты на два места.

5. Пункт С: период. Расстановка «точки + скорости» повторяется, когда каждый призрак вернётся в свою начальную точку (у всех призраков разные скорости, поэтому подменить друг друга они не могут). Призрак *a* возвращается через каждую 1 с, *c* и *d* — через каждые 2 с, *b* стоит; значит, впервые картина повторяется при $t = 2$ с, затем при 4 с, 6 с… При каждом таком повторении номера сдвигаются на одно и то же число мест — на два (шаг 4), потому что всё движение от $t = 2$ с до $t = 4$ с — точная копия движения от 0 до 2 с с переставленными номерами. Через 4 с номера сдвинутся на $2 + 2 = 4$ места, то есть вернутся на свои: бусинка 1 снова в 0° со скоростью 2π м/с и т. д.

$$T = 2 \cdot 2 \text{ с} = 4 \text{ с}.$$

Да, утверждение верно; наименьшее такое время $T = 4$ с.

Обратите внимание. Через 2 с кольцо выглядит точно как в начале, если не смотреть на номера, — но вопрос о положении и скорости *каждой* бусинки, поэтому ответ $T = 4$ с, а не 2 с.

Ответ. A1) и A2) — графики выше; B) $\varphi_1(2\text{ с}) = 180°$, 7 столкновений; C) верно, $T = 4$ с.

Проверка. Энергия: набор модулей скоростей бусинок (2π, 0, π, π м/с) при обменах не меняется, значит, кинетическая энергия сохраняется, как и должно быть при упругих ударах. Второй способ для пункта B: пошаговый расчёт ударов (кто с кем встречается раньше) даёт те же 7 ударов первой бусинки и $\varphi_1 = 180°$ при $t = 2$ с.

Смысл: при обмене скоростями движение «скоростей» простое и равномерное, а вся сложность — в том, кто из бусинок в данный момент несёт какую скорость.

Ответ. A) графики $\varphi_3(t)$ (без бусинок 2 и 4) и $\varphi_2(t)$ — в решении: φ_3 проходит точки $(0;180°)$, $(\frac{1}{3}\text{ с};120°)$, $(1\text{ с};360°)$, $(\frac{5}{3}\text{ с};240°)$, $(2\text{ с};360°)$, φ_2 — точки $(0;90°)$, $(\frac{1}{4};90°)$, $(\frac{1}{3};120°)$, $(\frac{1}{2};90°)$, $(1;90°)$, $(\frac{3}{2};180°)$, $(\frac{5}{3};240°)$, $(\frac{7}{4};225°)$, $(2;270°)$; B) 180°, 7 столкновений; C) верно, $T = 4$ с.