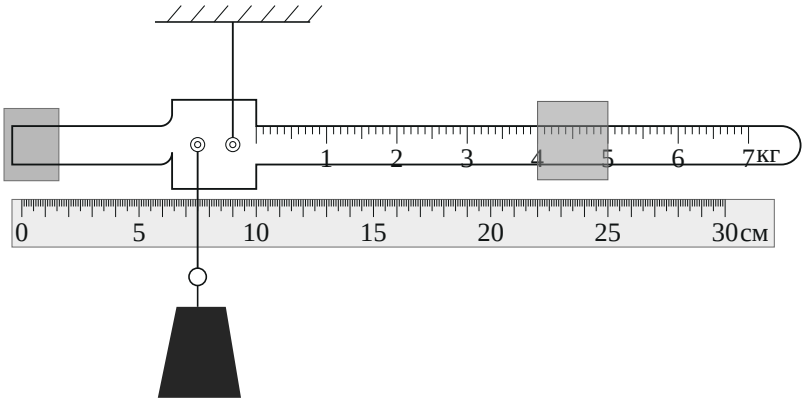
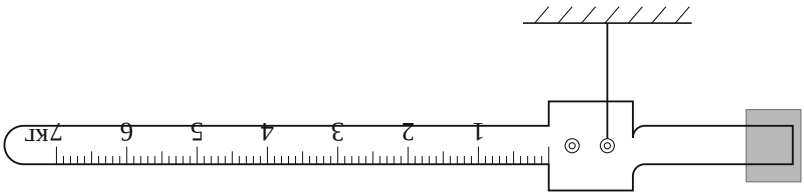
Безмен

Задача 2. [МОШ 2020/21, 8 класс, задача 2] Безмен — это ручные весы для взвешивания грузов небольшой массы. Один из вариантов конструкции безмена можно видеть на рисунке. Безмен состоит из металлического коромысла, закреплённого на коромысле противовеса (на левом конце коромысла) и подвижной гири (справа). На крючок подвешивается груз, массу которого надо узнать, а положение гири подбирается таким образом, чтобы в равновесии коромысло располагалось горизонтально. Показания безмена, изображённого на рисунке, равны 4 кг. Рядом с ним находится сантиметровая линейка.



Известно, что если с этого безмена снять гирю и подвесить его за ось, к которой был привязан крючок, иначе говоря, перевернуть (рис. ниже), то в положении равновесия коромысло будет располагаться горизонтально.



Определите по этим данным массу гири m и массу M остальной конструкции (безмена без гири и взвешиваемого груза).

▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на правило моментов для рычага. Безмен в равновесии, поэтому сумма моментов сил относительно оси подвеса равна нулю. Неизвестных две (m и M), и есть ещё одна неизвестная — где центр тяжести конструкции без гири. Её даёт перевёрнутый безмен, а две массы — шкала: её деления равномерны, значит, правило моментов выполняется при *любом* грузе, и двух делений шкалы хватает на два уравнения.

Обозначения. Координату x отсчитываем по линейке (в сантиметрах). O — ось подвеса безмена, x_O; K — ось крючка, x_K; C — центр тяжести безмена без гири (масса M); $m_\text{г}$ — масса груза, показание шкалы; x_m — координата центра гири.

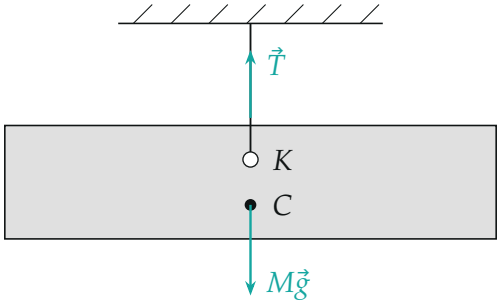
1. Отсчёты по рисунку. По линейке: ось подвеса $x_O = 9{,}0$ см, ось крючка $x_K = 7{,}5$ см. Деления шкалы: «1» — на 13,0 см, «4» — на 22,0 см, «7» — на 31,0 см, то есть 3,0 см на килограмм, а «0» пришёлся бы на 10,0 см (край колодки). Гиря занимает от 22,0 до 25,0 см: показание читается по её левому краю, а центр тяжести гири (середина однородного цилиндра) правее края на 1,5 см. Значит, при показании $m_\text{г}$

$$x_m = 10{,}0 + 3{,}0\,m_\text{г} + 1{,}5 = 11{,}5 + 3{,}0\,m_\text{г} \quad (\text{см};\ m_\text{г} \text{ в кг}),$$

на рисунке $x_m = 23{,}5$ см.

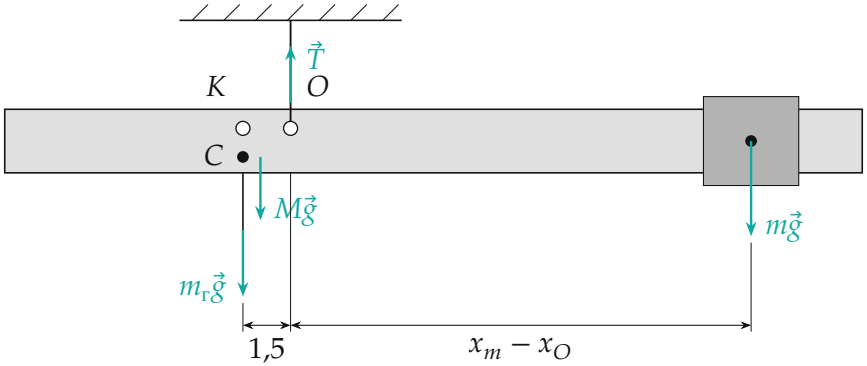
2. Перевёрнутый безмен: где центр тяжести. Без гири и груза на безмен действуют только сила тяжести $M\vec{g}$ (приложена в C) и натяжение нити (приложено к оси K). Правило моментов относительно оси K: момент натяжения равен нулю (сила проходит через ось), значит, и момент $M\vec{g}$ равен нулю — центр тяжести лежит на одной вертикали с осью K. Коромысло при этом горизонтально, поэтому по горизонтали

$$x_C = x_K = 7{,}5 \text{ см}.$$



Перевёрнутый безмен (без гири) висит на оси K: две силы уравновешены только тогда, когда центр тяжести C лежит на вертикали через K.

3. Безмен с грузом: правило моментов. Теперь безмен висит на оси O. На него действуют: натяжение верхней нити (через O, момента не даёт), сила тяжести конструкции Mg в точке C и вес груза $m_г g$ на крючке в точке K — обе на плече $x_O - x_K = 1{,}5$ см слева от O, и сила тяжести гири mg на плече $x_m - x_O$ справа.



Силы, действующие на безмен с грузом, и их плечи относительно оси подвеса O (в сантиметрах). Сила тяжести конструкции и вес груза действуют на одной вертикали через K и C; стрелка $M\vec{g}$ сдвинута вправо, чтобы не сливаться с нитью крючка.

Правило моментов относительно оси O (моменты по часовой и против часовой стрелки равны):

$$(M + m_г)\, g\, (x_O - x_K) = m\, g\, (x_m - x_O).$$

Подставим $x_O - x_K = 1{,}5$ см и $x_m - x_O = 11{,}5 + 3m_г - 9 = 2{,}5 + 3m_г$ (см):

$$1{,}5\,(M + m_г) = m\,(2{,}5 + 3m_г).$$

4. Два груза — две массы. Шкала размечена для всех грузов, поэтому равенство верно при любом $m_г$. Возьмём два показания: $m_г = 4$ кг (рисунок условия) и $m_г = 7$ кг (последнее деление):

$$1{,}5\,(M + 4) = m \cdot 14{,}5,$$
$$1{,}5\,(M + 7) = m \cdot 23{,}5.$$

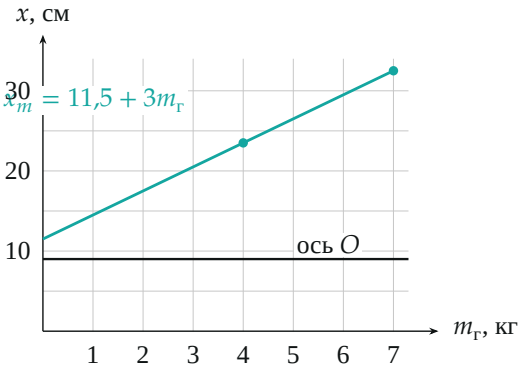
Вычтем первое из второго — неизвестная M уйдёт:

$$1{,}5 \cdot 3 = m \cdot 9 \quad \Rightarrow \quad m = 0{,}5 \text{ кг}.$$

Тогда из первого

$$M = \frac{m \cdot 14{,}5}{1{,}5} - 4 = \frac{0{,}5 \cdot 14{,}5}{1{,}5} - 4 = 4{,}83 - 4 \approx 0{,}83 \text{ кг}.$$

Второй способ: равенство $1{,}5M + 1{,}5m_г = 2{,}5m + 3m\,m_г$ верно при любом $m_г$ только тогда, когда совпадают коэффициенты при $m_г$ и свободные члены: $1{,}5 = 3m$, $1{,}5M = 2{,}5m$ — то же $m = 0{,}5$ кг и $M = \frac{5}{3}m \approx 0{,}83$ кг.



Положение центра гири по линейке в зависимости от показания: прямая

с наклоном 3 см/кг. Точки — два деления, по которым записаны уравнения; чёрная линия — ось подвеса.

Обратите внимание. Плечо гири отсчитывается до её *центра тяжести*, а не до деления шкалы, на котором стоит её край. Если взять плечо до края ($x_m = 10 + 3m_г$), масса гири выйдет та же (0,5 кг, она определяется только шагом шкалы), но $M = \frac{1}{1{,}5} \cdot 0{,}5 \cdot 1 = 0{,}33$ кг — неверно.

Ответ. $m = \dfrac{x_O - x_K}{3\ \text{см/кг}} = 0{,}5$ кг; $\quad M = \dfrac{m\,(x_{m0} - x_O)}{x_O - x_K} = \dfrac{0{,}5 \cdot 2{,}5}{1{,}5} \approx 0{,}83$ кг, где $x_{m0} = 11{,}5$ см — центр гири при нулевом показании.

Проверка. Подставим в правило моментов показание «1 кг» ($x_m = 14{,}5$ см): слева $1{,}5 \cdot (0{,}83 + 1) = 2{,}75$, справа $0{,}5 \cdot 5{,}5 = 2{,}75$ кг·см — равновесие. Предел: без груза ($m_г = 0$) гиря стоит у колодки, и её момент $0{,}5 \cdot 2{,}5$ уравновешивает только момент самой конструкции $0{,}83 \cdot 1{,}5$ — оба по 1,25 кг·см.

Смысл: шаг шкалы задаёт отношение m к плечу крючка, а положение нуля шкалы — массу самого безмена.

Ответ. $m = 0{,}5$ кг, $\quad M \approx 0{,}83$ кг.