Про электросамокат

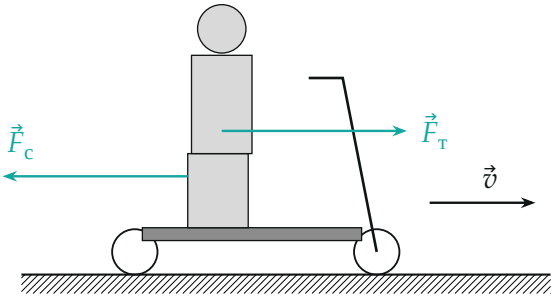
Задача 3. [МОШ 2020/21, 8 класс, задача 3] В электросамокате в качестве источника энергии используется батарея литий-ионных аккумуляторов. При помощи специального устройства, которое называется контроллером, и мотора электрическая энергия, запасённая в аккумуляторе, преобразуется в механическую работу без потерь. Можно считать, что при движении с постоянной скоростью вся механическая работа совершается мотором самоката против силы сопротивления воздуха, которая пропорциональна квадрату скорости самоката. Уровень заряда батареи пропорционален электрической энергии, запасённой в аккумуляторе.

При движении на самокате со скоростью 15 км/ч по горизонтальной дороге уровень заряда батареи уменьшается от 80 % до 70 % за 20 минут. За какое время произойдёт такое же уменьшение заряда батареи, при движении со скоростью 18,9 км/ч по той же дороге на том же самокате того же самого человека, что и в первом случае?

Пояснение. Когда мы говорим «работа совершается против силы сопротивления воздуха», то имеем в виду, что работа сил, заставляющих самокат двигаться, равна по абсолютной величине работе силы сопротивления.

▲ **Решение.** **Что происходит.** Это задача на мощность. Самокат едет равномерно, значит, сила тяги мотора равна силе сопротивления воздуха, а энергия батареи тратится со скоростью, равной мощности силы тяги $P = Fv$. Сила сопротивления растёт как v^2, путь за секунду — как v, поэтому мощность растёт как v^3. Расход одной и той же порции энергии (10 % заряда) занимает время, обратно пропорциональное мощности.

Обозначения. $v_1 = 15$ км/ч, $v_2 = 18{,}9$ км/ч — скорости; $F = kv^2$ — сила сопротивления воздуха (k — коэффициент, один и тот же: тот же самокат и тот же человек, та же поза); ΔW — энергия, соответствующая 10 % заряда; $t_1 = 20$ мин, t_2 — искомое время.



Самокат с человеком при движении с постоянной скоростью: сила тяги мотора $\vec{F}_m$ уравновешивает силу сопротивления воздуха $\vec{F}_c$ (вес и реакция дороги уравновешены и на рисунке не показаны).

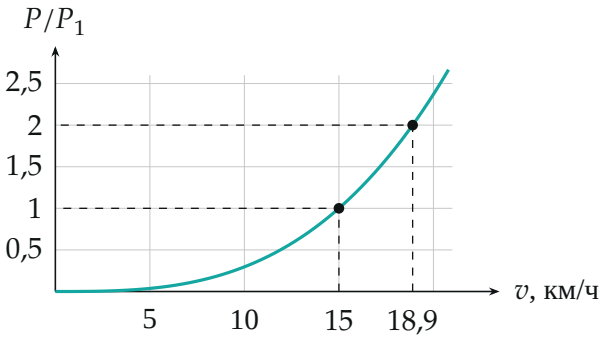
1. Сила тяги. Самокат едет с постоянной скоростью, поэтому по второму закону Ньютона в проекции на горизонтальную ось x (по движению) сумма сил равна нулю: $F_т - F_c = 0$,

$$F_т = F_c = kv^2.$$

2. Энергия батареи за время t. Контроллер и мотор работают без потерь, поэтому энергия, взятая из батареи, равна работе силы тяги: $\Delta W = A = F_т s$. За время t при скорости v путь $s = vt$, значит,

$$\Delta W = kv^2 \cdot vt = kv^3 t, \qquad P = \frac{\Delta W}{t} = kv^3.$$

Мощность растёт как куб скорости: сопротивление больше в v^2 раз, и путь за секунду больше в v раз.



Мощность, которую забирает мотор, в зависимости от скорости: $P \propto v^3$ (вычислено по точкам). При 18,9 км/ч она ровно вдвое больше, чем при 15 км/ч.

3. Сравним два режима. Расход одинаковый — те же 10 % заряда, то есть одна и та же энергия ΔW (заряд пропорционален энергии). Запишем шаг 2 для обоих режимов и поделим:

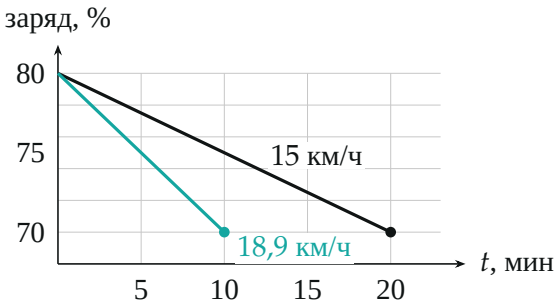
$$kv_1^3 t_1 = kv_2^3 t_2 \quad \Rightarrow \quad t_2 = t_1 \left(\frac{v_1}{v_2}\right)^3.$$

Неизвестный коэффициент k сократился. Отношение скоростей

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{18{,}9}{15} = 1{,}26, \qquad 1{,}26^3 = 2{,}000,$$

скорость выбрана так, что мощность ровно удваивается. Получаем

$$t_2 = \frac{20\text{ мин}}{2{,}0} = 10\text{ мин}.$$



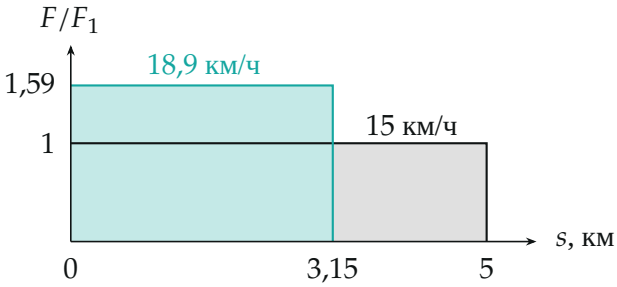
Уровень заряда батареи по времени в двух режимах: при 18,9 км/ч он падает вдвое быстрее.

Обратите внимание. Сила сопротивления растёт как v^2, но расход энергии *в единицу времени* — как v^3: мотор тянет с большей силой и при этом за секунду проходит больший путь. Если взять в расчёт только силу (v^2), получится неверное $t_2 = 20 \cdot (15/18{,}9)^2 \approx 12{,}6$ мин. У организаторов в ответе указано «≈ 20 мин»; такое время получилось бы

только при одинаковой мощности, что противоречит их же критерию (работа пропорциональна $v^3 t$) — верный ответ 10 мин.

Ответ. $t_2 = t_1 \left(\dfrac{v_1}{v_2}\right)^3 = 20 \text{ мин} \cdot \left(\dfrac{15}{18{,}9}\right)^3 \approx 10 \text{ мин}.$

Проверка. Размерность: t_1 — минуты, отношение скоростей безразмерно. Предел: при $v_2 = v_1$ получаем $t_2 = t_1$. Второй способ, через путь: при 15 км/ч за 20 мин самокат проезжает 5 км; на 1 км пути тратится энергия $F \cdot 1 \text{ км} \propto v^2$, то есть при 18,9 км/ч в $1{,}26^2 = 1{,}59$ раза больше, и 10 % заряда хватит на $5/1{,}59 = 3{,}15$ км — это $3{,}15/18{,}9$ ч $= 10$ мин.



Работа силы тяги — площадь под графиком $F(s)$. Площади двух прямоугольников равны (одни и те же 10 % заряда): больше сила — короче путь.

Смысл: при езде быстрее сопротивление воздуха «съедает» батарею очень резко — прибавка скорости на четверть вдвое сокращает время езды на том же заряде.

Ответ. Примерно за 10 минут: $t_2 = t_1 \, (v_1/v_2)^3 = 20 \text{ мин}/2$.