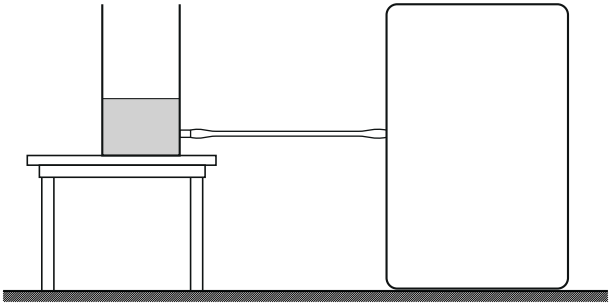
Предложите конструкцию

Задача 4. [МОШ 2020/21, 8 класс, задача 4] На столе стоит цилиндрический сосуд с вертикальными стенками, заполненный водой примерно наполовину. Площадь сечения сосуда равна $S = 400$ см^2, внизу сосуда имеется штуцер, к которому присоединён горизонтально расположенный шланг. Другой конец шланга соединён со штуцером «чёрного ящика», в котором находится неизвестное устройство (см. рисунок).



Неизвестное устройство действует следующим образом. Если в сосуд доливают немного воды (Δm порядка 100 г), уровень жидкости в сосуде опускается (!) по сравнению с первоначальным. Если же после этого из сосуда зачерпывают такую же порцию воды, то уровень поднимается до первоначальной высоты. Предложите конструкцию устройства, которое может находится внутри чёрного ящика. Изобразите схему устройства и коротко объясните принцип его работы.

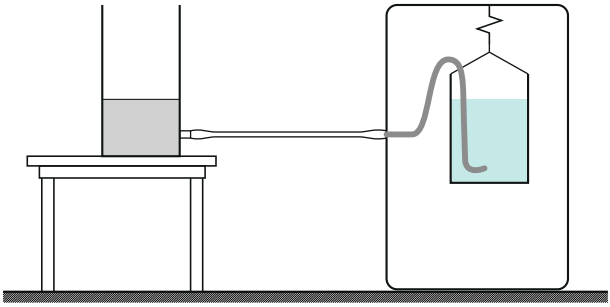
Известно, что в конструкции устройства используется некоторое оборудование из следующего списка: цилиндрический сосуд — такой же, как на столе, нерастяжимые нити, пружина жёсткостью $k = 300$ Н/м, набор грузов разных масс, резиновый шланг с внутренним диаметром, соответствующим диаметру штуцера на стенке ящика. Все грузы и сосуд снабжены крючками, которые могут быть использованы для крепления нитей и пружины. Крепления для нитей и пружины имеются также на потолке и стенах ящика.

Плотность воды и ускорение свободного падения равны: $\rho = 1000$ кг/м^3 и $g = 10$ Н/кг.

▲ **Решение. Что происходит.** Сосуд на столе соединён шлангом с чем-то внутри ящика, и вода в них — сообщающиеся сосуды: уровни воды одинаковы. Чтобы уровень *падал* при доливании, второй сосуд должен опускаться, когда в него натекает вода, причём опускаться сильнее, чем поднимается в нём вода. Это делает сосуд, подвешенный на мягкой пружине: лишняя вода растягивает пружину, сосуд вместе с водой уходит вниз и «утаскивает» уровень. Задача сводится к тому, достаточно ли мягка данная пружина.

Обозначения. S — сечение каждого из двух сосудов; H — общий уровень воды (над полом); Δm — долитая масса; Δm_1 и Δm_2 — на сколько изменилась масса воды в сосуде на столе и в подвешенном сосуде; Δx — дополнительное растяжение пружины; $\beta = \dfrac{\rho g S}{k}$ — безразмерное отношение «жёсткости воды» в сосуде к жёсткости пружины.

1. Конструкция. Второй такой же сосуд подвешиваем на нитях к пружине, пружину — к потолку ящика. Шланг одним концом надеваем на штуцер ящика изнутри, другой конец перекидываем через край подвешенного сосуда и опускаем под воду почти до дна. Из шлангов предварительно удаляем воздух: тогда шланг работает как сифон, и вода свободно перетекает в обе стороны, а уровни в двух сосудах одинаковы (давление на одной высоте в покоящейся воде одно и то же). Гибкий шланг не мешает сосуду опускаться.



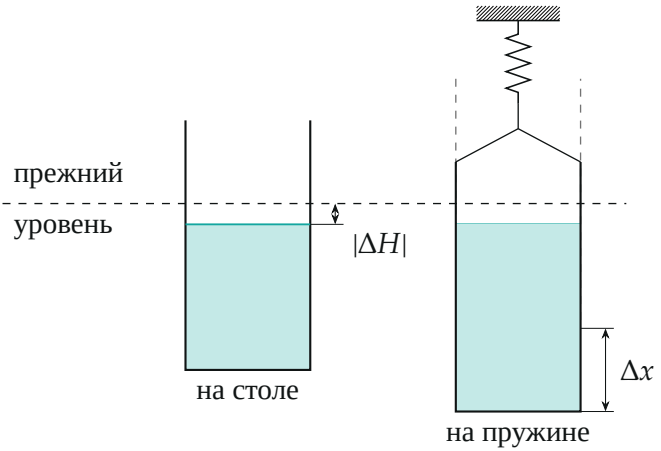
Возможное устройство в чёрном ящике: сосуд с водой на пружине, соединённый с сосудом на столе шлангом-сифоном. Уровни воды в двух сосудах одинаковы.

2. Что меняется при доливании. Пусть в сосуд на столе долили Δm. Часть воды перетекает в подвешенный сосуд, и в новом равновесии:

- масса сохраняется: $\Delta m_1 + \Delta m_2 = \Delta m$;
- уровень в сосуде на столе (дно неподвижно) меняется на $\Delta H = \Delta m_1/(\rho S)$;
- подвешенный сосуд: условие равновесия (сила упругости равна весу сосуда с водой) в изменениях даёт $k\,\Delta x = \Delta m_2\, g$ — сосуд опускается на $\Delta x = g\,\Delta m_2/k$; уровень воды в нём над его дном вырос на $\Delta m_2/(\rho S)$, а над полом изменился на

$$\Delta H_2 = \frac{\Delta m_2}{\rho S} - \frac{g\,\Delta m_2}{k} = \frac{\Delta m_2}{\rho S}\,(1-\beta);$$

- уровни одинаковы и до, и после: $\Delta H_2 = \Delta H$.



Новое равновесие (сплошные линии) и прежнее (штриховые): подвешенный сосуд опустился на Δx больше, чем в нём поднялась вода, поэтому общий уровень стал ниже прежнего на $|\Delta H|$. Сдвиги в пропорции Δx : подъём воды в сосуде : $|\Delta H|$ = 5 : 3,75 : 1,25 мм, увеличены для наглядности.

3. Решаем. Из второго и четвёртого пунктов: $\dfrac{\Delta m_1}{\rho S} = \dfrac{\Delta m_2}{\rho S}(1-\beta)$, то

есть $\Delta m_1 = (1-\beta)\,\Delta m_2$. С законом сохранения массы:

$$\Delta m_2 = \frac{\Delta m}{2-\beta}, \qquad \Delta m_1 = \frac{1-\beta}{2-\beta}\Delta m, \qquad \Delta H = \frac{1-\beta}{2-\beta}\cdot\frac{\Delta m}{\rho S}.$$

Уровень опускается ($\Delta H < 0$ при $\Delta m > 0$), если $1 < \beta < 2$, то есть

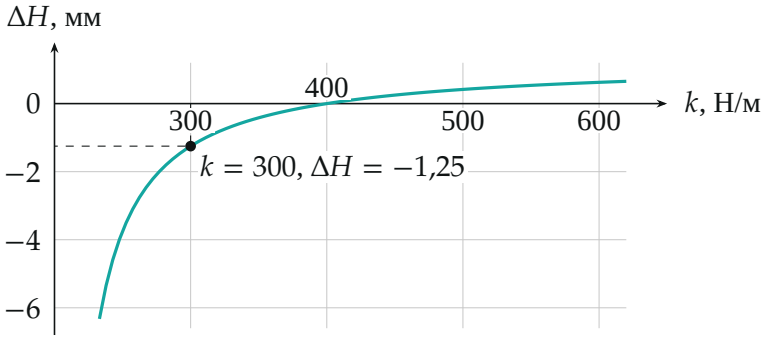
$$\frac{\rho g S}{2} < k < \rho g S, \qquad 200\ \text{Н/м} < k < 400\ \text{Н/м}.$$

Наша пружина $k = 300$ Н/м в этот интервал попадает: $\rho g S = 1000 \cdot 10 \cdot 0{,}04 = 400$ Н/м, $\beta = \frac{4}{3}$. Числа для $\Delta m = 100$ г:

$$\Delta m_2 = \frac{0{,}1}{2/3} = 0{,}15\ \text{кг}, \qquad \Delta m_1 = -0{,}05\ \text{кг},$$

$$\Delta H = \frac{-0{,}05}{1000 \cdot 0{,}04}\ \text{м} = -1{,}25\ \text{мм}.$$

В подвешенный сосуд перетекает больше, чем долили: 150 г, из сосуда на столе уходит 50 г, и его уровень опускается на 1,25 мм — заметно на глаз. Если зачерпнуть те же 100 г, все изменения идут в обратную сторону, и уровень возвращается к прежнему.



Изменение уровня при доливании 100 г в зависимости от жёсткости пружины (по формуле шага 3). При $k > 400$ Н/м уровень поднимается, как обычно; при $k \to 200$ Н/м опускание неограниченно растёт.

4. Почему пружина не слишком мягкая. При $k < 200$ Н/м ($\beta > 2$) формулы шага 3 дают «равновесие», которое не устоит. Пусть из сосуда на столе в подвешенный случайно перетекла порция δm. Уровень на столе опустится на $\dfrac{\delta m}{\rho S}$, а в подвешенном сосуде изменится на $\dfrac{\delta m}{\rho S}(1-\beta)$, то есть тоже опустится, на $\dfrac{\delta m}{\rho S}(\beta-1)$. Если $\beta - 1 < 1$ (наш случай), подвешенный уровень опустился меньше и оказался выше уровня на столе — вода течёт обратно, равновесие устойчиво. При $\beta > 2$ подвешенный уровень оказался бы ниже, вода потекла бы дальше, и сосуд опускался бы, пока пружина не дойдёт до предела. Поэтому мягкая пружина с $k = 300$ Н/м подходит как раз потому, что попадает в «окно» 200–400 Н/м.

Обратите внимание. Шланг в ящике обязательно заполнен водой без воздуха: подвешенный сосуд открыт сверху, и шланг входит в него через край. Без сифона (или с воздушной пробкой) вода не перетекала бы, и сосуды не были бы сообщающимися.

Ответ. Сосуд с водой на пружине $k = 300$ Н/м, соединённый со штуцером шлангом-сифоном; при доливании Δm общий уровень меняется на $\Delta H = \dfrac{1-\beta}{2-\beta} \cdot \dfrac{\Delta m}{\rho S}$, $\beta = \dfrac{\rho g S}{k} = \dfrac{4}{3}$, то есть $\Delta H = -1{,}25$ мм при $\Delta m = 100$ г.

Проверка. Размерность: $\beta = \dfrac{\text{кг/м}^3 \cdot \text{Н/кг} \cdot \text{м}^2}{\text{Н/м}}$ — безразмерна; $\Delta m/(\rho S)$ — метры. Пределы: очень жёсткая пружина ($k \to \infty$, $\beta \to 0$) $\Rightarrow \Delta H = \dfrac{\Delta m}{2\rho S}$ — вода делится поровну между двумя неподвижными одинаковыми сосудами, как и должно быть. При $k = \rho g S$ ($\beta = 1$) уровень не меняется: подвешенный сосуд опускается ровно на столько, на сколько в нём поднимается вода.

Смысл: подвешенный на мягкой пружине сосуд «проседает» под долитой водой сильнее, чем она его наполняет, и уносит общий уровень вниз.

Ответ. Такой же сосуд с водой подвешен на нитях к пружине $k = 300$ Н/м (к потолку ящика), шланг от штуцера заполнен водой и опу-

щен через край в этот сосуд, как сифон. Долитая вода перетекает в подвешенный сосуд, он опускается сильнее, чем в нём поднимается вода ($\rho g S/2 < k < \rho g S$), и общий уровень падает — на 1,25 мм при $\Delta m = 100$ г; зачерпнули — всё обратно.