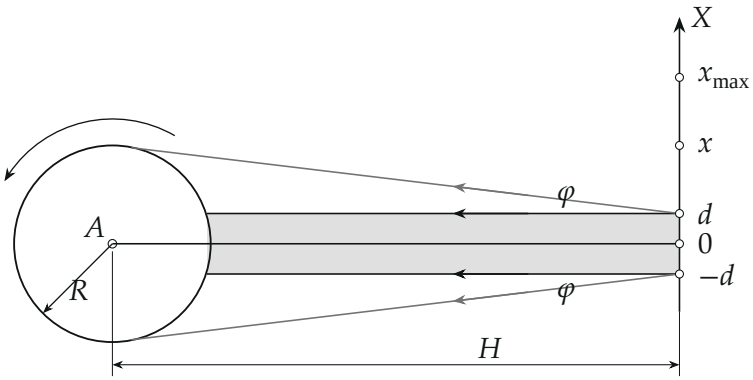
Диско-шар

Задача 1. [МОШ 2020/21, 9 класс, задача 1] Диско-шар — это шар с зеркальной поверхностью, состоящей из сотен или тысяч граней, каждая из которых — маленькое плоское зеркало. Обычно он подвешивается на потолке к устройству, которое равномерно вращает его вокруг вертикальной оси. Когда шар освещается прожекторами, зрители видят многочисленные отблески («зайчики»), бегущие по полу, стенам и потолку помещения (фото ниже). Зеркальные шары приобрели популярность в период расцвета музыкального стиля диско, в конце 70-х годов 20 века, когда их стали устанавливать в залах дискотек и ночных клубов.

Пусть шар радиусом R вращается вокруг вертикальной оси, проходящей через его центр (т. A, рис. ниже, вид сверху), совершая n оборотов в секунду. Расстояние от центра шара до вертикальной стены, совпадающей с горизонтальной осью $0X$ на рисунке, равно H, при этом $H \gg R$. Шар освещается пучком параллельных лучей, который формируется прожектором, расположенным на стене на той же высоте, что и центр шара. Лучи света от прожектора идут перпендикулярно стене, поперечный размер пучка равен $2d$.



Рассмотрим «зайчики», бегущие по стене на той же высоте, что и прожектор.

1. Чему равно максимальное значение координаты зайчика x_{max}?

2. Определите скорость $v(x)$ движения «зайчика», проходящего точку с координатой x.
3. Пусть одинаковые маленькие плоские зеркала, покрывающие поверхность шара, имеют форму квадратиков с длиной стороны a ($a \ll R$). Пусть пучок света прожектора, падающий на шар, имеет небольшую расходимость (рис. выше), определяемую углом 2φ ($\varphi \ll 1$, см. Указание). Оцените максимальное значение угла φ, при котором хотя бы в некоторых точках стены можно будет различить отдельные «зайчики».

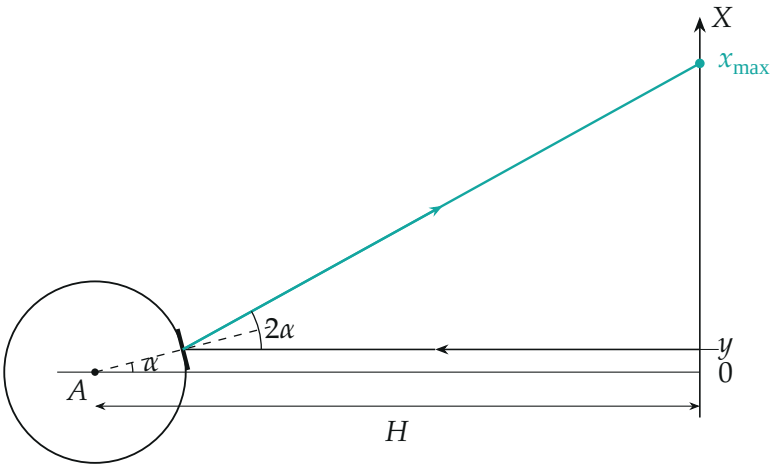
Указание. При решении задач 1 и 5 могут оказаться полезными следующие приближённые соотношения для тригонометрических функций малых углов α ($\alpha \ll 1$, $[\alpha] = \text{рад}$): $\sin\alpha \approx \alpha$, $\cos\alpha \approx 1$, $\operatorname{tg}\alpha \approx \alpha$.

▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на закон отражения и кинематику вращения. Каждое зеркальце шара — плоское зеркало, перпендикулярное радиусу. Луч прожектора, попавший на зеркальце, у которого нормаль отклонена от направления луча на угол α, отражается и уходит назад к стене, повернувшись на 2α от первоначального направления. Освещены только зеркальца в полосе шириной $2d$, поэтому α ограничен — отсюда $x_{\max}$. При вращении шара нормаль каждого зеркальца поворачивается с угловой скоростью шара, а отражённый луч — вдвое быстрее; точка, где луч упирается в стену, и есть бегущий зайчик.

Обозначения. α — угол между нормалью зеркальца (радиусом) и осью пучка; y — расстояние от луча до оси пучка, $|y| \le d$; $\theta = 2\alpha$ — угол отражённого луча с перпендикуляром к стене; $\omega = 2\pi n$ — угловая скорость шара; x — координата зайчика на стене.

Пункт 1.

1. Угол поворота луча. Рассмотрим луч на расстоянии y от оси $A0$. Он падает на шар в точке, радиус в которую составляет с осью угол α, $\sin\alpha = y/R$; зеркальце там перпендикулярно радиусу. По закону отражения угол падения (между лучом и нормалью) равен углу отражения, поэтому отражённый луч составляет с обратным направлением падающего угол 2α.



Луч на расстоянии y от оси падает на зеркальце, нормаль которого (пунктир) отклонена на угол α; отражённый луч (бирюзовый) уходит к стене под углом 2α к перпендикуляру. Нарисован крайний луч $y = d$; масштаб: $R = 1{,}2$, $d = 0{,}3$, $H = 8$.

2. Координата зайчика. Отражённый луч проходит до стены расстояние $H - R\cos\alpha \approx H$ (поскольку $H \gg R$) и смещается вдоль стены на $H\,\mathrm{tg}\,2\alpha$; начальным смещением $y \leq d < R \ll H$ пренебрегаем:

$$x \approx H\,\mathrm{tg}\,2\alpha.$$

Чем больше α, тем дальше зайчик. Наибольший угол — у крайнего луча пучка, $\sin\alpha_{max} = d/R$. Через синус и косинус ($\cos\alpha = \sqrt{R^2 - d^2}/R$):

$$\mathrm{tg}\,2\alpha_{max} = \frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha} = \frac{2d\sqrt{R^2 - d^2}}{R^2 - 2d^2},$$

$$x_{max} = 2dH\,\frac{\sqrt{R^2 - d^2}}{R^2 - 2d^2} \approx \frac{2dH}{R} \quad (d \ll R).$$

Формула имеет смысл при $d < R/\sqrt{2}$: иначе крайние лучи поворачиваются больше чем на 90° и до этой стены не доходят.

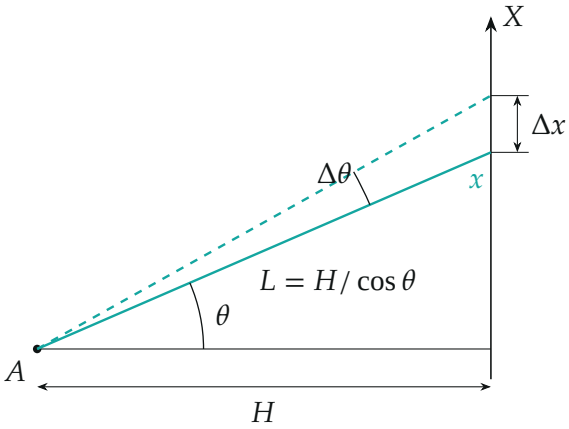
Пункт 2.

3. Скорость поворота отражённого луча. Шар вращается равномерно: за время Δt нормаль каждого зеркальца (в горизонтальной плоскости на высоте центра) поворачивается на угол $\Delta\alpha = \omega\Delta t$. Падающий луч не меняется, значит, отражённый поворачивается на $\Delta\theta = 2\Delta\alpha$:

$$\frac{\Delta\theta}{\Delta t} = 2\omega = 4\pi n.$$

4. Скорость зайчика на стене. Зайчик в точке $x = H\,\mathrm{tg}\,\theta$; луч длиной $L = H/\cos\theta$ поворачивается на малый угол $\Delta\theta$, и его конец смещается перпендикулярно лучу на $L\Delta\theta$. Вдоль стены это смещение в $1/\cos\theta$ раз больше (стена наклонена к этому малому смещению на угол θ):

$$\Delta x = \frac{L\,\Delta\theta}{\cos\theta} = \frac{H\,\Delta\theta}{\cos^2\theta} = H(1+\mathrm{tg}^2\theta)\Delta\theta = H\Big(1+\frac{x^2}{H^2}\Big)\Delta\theta.$$

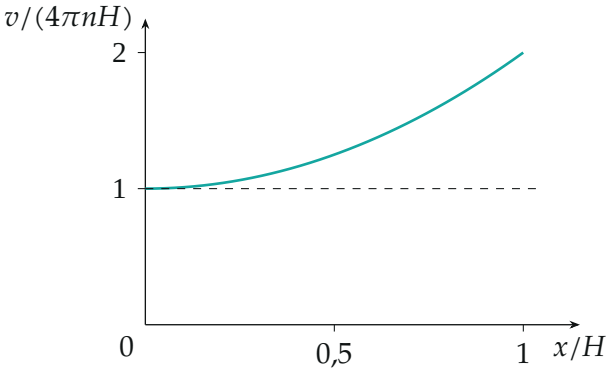


Отражённый луч поворачивается на $\Delta\theta$, его конец на стене смещается на $\Delta x = H\Delta\theta/\cos^2\theta$: чем дальше от основания перпендикуляра, тем быстрее бежит зайчик.

Делим на Δt:

$$v(x) = 2\omega H\Big(1+\frac{x^2}{H^2}\Big) = 4\pi n H\Big(1+\frac{x^2}{H^2}\Big) \approx 4\pi n H.$$

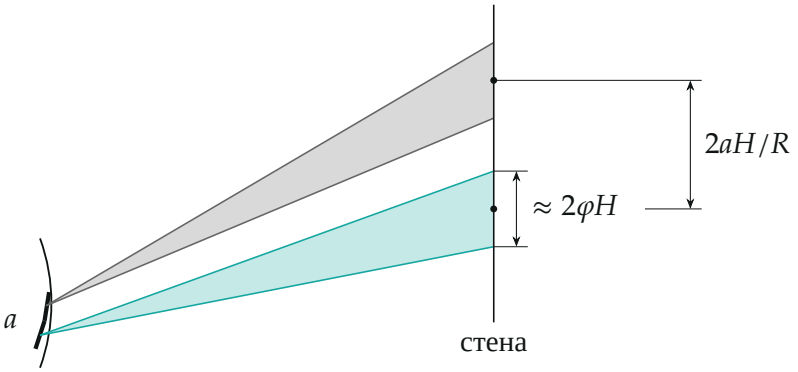
Приближение верно при $x \ll H$, то есть при $d \ll R$: тогда $x \leq x_{\max} \approx 2dH/R \ll H$.



Скорость зайчика в зависимости от координаты: у основания перпендикуляра $4\pi nH$, на расстоянии $x = H$ вдвое больше.

Пункт 3.

5. Размер зайчика и расстояние между соседними. Организаторы отметили, что в формулировке этой части допущена ошибка, и ответа не дали; приведём естественную оценку. Зеркальце размером a отражает пучок с расходимостью 2φ: плоское зеркало расходимость не меняет, поэтому на стене, у основания перпендикуляра, зайчик имеет размер $\approx a + 2\varphi H \approx 2\varphi H$ (при $\varphi H \gg a$). Соседние зеркальца повёрнуты друг относительно друга на угол a/R (по дуге шара), и их отражённые лучи — на $2a/R$, поэтому центры соседних зайчиков разнесены на $2aH/R$.



Два соседних зеркальца дают два зайчика (без масштаба): каждый расплывается на $2\varphi H$ из-за расходимости пучка, а их центры разнесены на $2aH/R$. Зайчики различимы, пока пятна не сливаются.

6. Оценка φ. Зайчики различимы, если пятно меньше расстояния между центрами:

$$2\varphi H \lesssim \frac{2aH}{R} \quad \Rightarrow \quad \varphi_{\max} \sim \frac{a}{R}.$$

Вдали от основания перпендикуляра и размер пятна, и расстояние между зайчиками растут в одинаковое число раз $1/\cos^2\theta$ (как в шаге 4), поэтому оценка от точки стены не зависит.

Обратите внимание. Зайчик бежит вдвое быстрее, чем повернулось бы само зеркальце: отражённый луч поворачивается на удвоенный угол поворота зеркала. И скорость зайчика не равна скорости зеркальца ωR — она определяется расстоянием до стены H.

Ответ. 1) $x_{\max} = 2dH\dfrac{\sqrt{R^2-d^2}}{R^2-2d^2} \approx \dfrac{2dH}{R}$; 2) $v(x) = 4\pi Hn\left(1+\dfrac{x^2}{H^2}\right) \approx 4\pi Hn$; 3) $\varphi_{\max} \sim a/R$ (оценка; организаторы признали формулировку пункта ошибочной).

Проверка. Размерности: dH/R — длина, nH — м/с, a/R — безразмерный угол. Предел $d \to 0$: пучок — одна линия по оси, $x_{\max} \to 0$, зайчик только в точке 0 (зеркальце, перпендикулярное лучу, отражает его назад в прожектор). Численно для $R = 1{,}2$, $d = 0{,}3$, $H = 8$ (рисунок к шагу 1) точный расчёт с учётом y и $R\cos\alpha$ даёт $x = 4{,}08$, формула $H\operatorname{tg}2\alpha$ — 4,43: поправки порядка R/H.

Смысл: зеркальный шар превращает медленное вращение в быстрый бег зайчиков: скорость $4\pi nH$ растёт с размером зала.

Ответ. 1) $x_{\max} = 2dH\dfrac{\sqrt{R^2-d^2}}{R^2-2d^2} \approx \dfrac{2dH}{R}$; 2) $v(x) = 4\pi Hn\left(1+\dfrac{x^2}{H^2}\right) \approx 4\pi Hn$; 3) $\varphi_{\max} \sim a/R$.