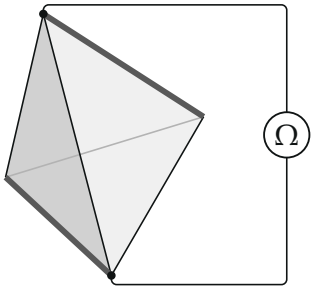
Тетраэдр

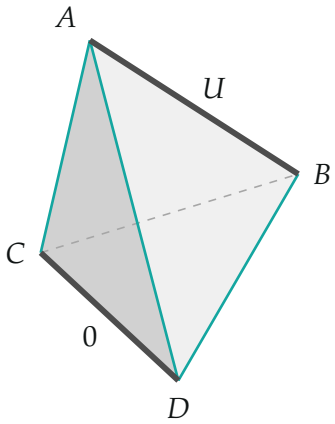
Задача 3. [МОШ 2020/21, 9 класс, задача 3] Правильный тетраэдр сделан из непроводящего материала. Его поверхность покрыта тонкой фольгой толщины h, много меньшей размеров рёбер. Удельное сопротивление материала фольги равно ρ.



К двум не соприкасающимся рёбрам вдоль всей их длины припаяли медные проволочки пренебрежимо малого сопротивления (линии увеличенной толщины на рис. выше), к которым подключили омметр. Какую величину сопротивления показывает прибор?

▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на сопротивление проводника $R = \rho l/S$ и на симметрию. Электроды — два противоположных ребра тетраэдра. Остальные четыре ребра образуют замкнутый «пояс», и все четыре грани прилегают к нему по кругу. Если разрезать поверхность вдоль одного из рёбер пояса и развернуть на плоскость, получится полоса между двумя прямыми электродами — а в такой полосе ток течёт равномерно, и сопротивление считается как у прямоугольного бруска.

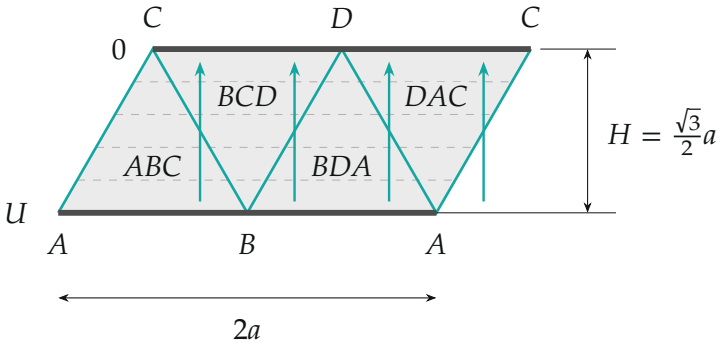
Обозначения. A, B, C, D — вершины; электроды — рёбра AB и CD; a — длина ребра; $H = \frac{\sqrt{3}}{2}a$ — высота грани; h — толщина фольги; U — напряжение омметра.



Электроды — рёбра AB (потенциал U) и CD (потенциал 0). Бирюзовые рёбра AC, AD, BD и невидимое BC (пунктир) образуют замкнутый пояс A–C–B–D–A, к которому прилегают все четыре грани.

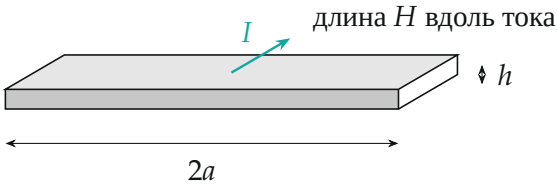
1. Как устроены грани. Каждая из четырёх граней содержит целиком одно ребро-электрод и одну вершину другого: ABC и ABD опираются на AB, ACD и BCD — на CD. Соседние грани по кругу соединены рёбрами пояса: ABC и BCD — ребром BC, BCD и ABD — ребром BD, ABD и ACD — ребром AD, ACD и ABC — ребром AC. Через эти рёбра ток свободно переходит с грани на грань: фольга сплошная.

2. Развёртка. Разрежем поверхность по ребру AC и положим грани на плоскость в порядке ABC, BCD, BDA, DAC, приставляя каждую к предыдущей по общему ребру. Все грани — правильные треугольники, поэтому они встают поочерёдно «вершиной вверх» и «вершиной вниз», и получается параллелограмм высотой H и основанием $2a$.



Развёртка поверхности, разрезанной по ребру AC: нижняя сторона параллелограмма — ребро AB дважды, верхняя — ребро CD дважды. Левая и правая наклонные стороны — это одно и то же ребро AC, их точки склеены. Пунктир — эквипотенциали, стрелки — ток.

3. Поле в развёртке. Нижняя сторона параллелограмма целиком лежит на электроде AB (потенциал U), верхняя — на электроде CD (потенциал 0). Боковые стороны не граница фольги: это одно ребро AC, и ток через него свободно переходит с правого края на левый. Значит, развёртка — кусок бесконечной полосы между двумя параллельными электродами, повторяющийся с периодом $2a$. В такой полосе поле однородно и направлено перпендикулярно электродам: потенциал меняется линейно от U до 0 по высоте H, эквипотенциали — горизонтальные прямые, плотность тока одинакова везде. Это согласуется и со склейкой: точки левого и правого краёв на одной высоте имеют один потенциал.



Эквивалентный проводник: пластина длиной H вдоль тока с поперечным сечением $S = 2a \cdot h$.

4. Сопротивление. Однородный проводник длиной $l = H$ (вдоль тока) с поперечным сечением $S = 2a \cdot h$ (ширина развёртки на толщину

фольги):

$$R = \rho\frac{l}{S} = \rho\frac{H}{2ah} = \rho\frac{\sqrt{3}a/2}{2ah} = \frac{\sqrt{3}\rho}{4h}.$$

Ребро сократилось: у квадратного куска фольги сопротивление между противоположными сторонами ρ/h не зависит от размера, а наша развёртка — это «$\frac{\sqrt{3}}{4}$ квадрата» (длина H меньше ширины $2a$ в $4/\sqrt{3}$ раза).

Обратите внимание. Нельзя считать каждую грань отдельно (электрод — ребро, другой электрод касается грани лишь вершиной): сопротивление такой изолированной грани было бы бесконечным из-за сгущения тока к точке. Ток идёт по фольге через соседние грани, и только развёртка всех четырёх граней сразу показывает, что поле однородно.

Ответ. $R = \rho\dfrac{H}{2ah} = \dfrac{\sqrt{3}\rho}{4h} \approx 0{,}43\,\dfrac{\rho}{h}$.

Проверка. Размерность: ρ/h — Ом · м/м = Ом. Второй способ — через ток: в однородной полосе плотность тока $j = E/\rho = U/(\rho H)$, ток через сечение $2a \times h$ равен $I = jh \cdot 2a = 2ahU/(\rho H)$, откуда $R = U/I = \rho H/(2ah)$ — то же. Симметрия: при замене электродов местами ($AB \leftrightarrow CD$) развёртка переворачивается, ответ не меняется.

Смысл: сопротивление тонкой плёнки зависит только от отношения длины к ширине, а у тетраэдра с электродами на противоположных рёбрах это отношение равно $\sqrt{3}/4$.

Ответ. $R = \dfrac{\sqrt{3}\rho}{4h}$.