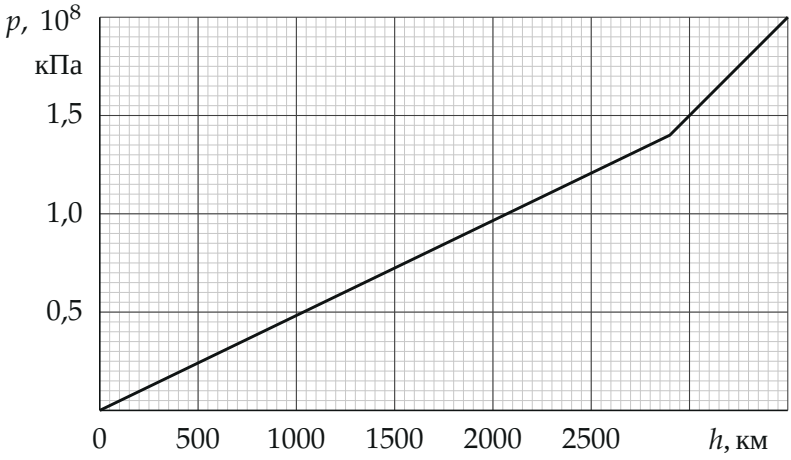
Плотность мантии

Задача 4. [МОШ 2020/21, 9 класс, задача 4] По существующим представлениям о строении Земли под слоем земной коры небольшой толщины находится мантия, состоящая из силикатных пород и простирающаяся примерно до глубины 2900 км, мантия окружает жидкое внешнее ядро. С небольших глубин из-за высоких давлений твёрдое вещество мантии начинает проявлять пластические свойства, поэтому при расчётах можно считать его жидким. На основе анализа данных о скоростях распространения сейсмических волн возникли модельные представления о распределении давления внутри Земли. В первом приближении график зависимости давления p от глубины h (при $h \lesssim 3500$ км) состоит из двух линейных участков (рис. ниже), при этом гравитационная сила, действующая на тело массой m со стороны Земли на глубинах до 3000 км, определяется по той же формуле, что и на поверхности: $F = mg$. Можно считать, что ускорение свободного падения равно $g = 10$ м/с^2.

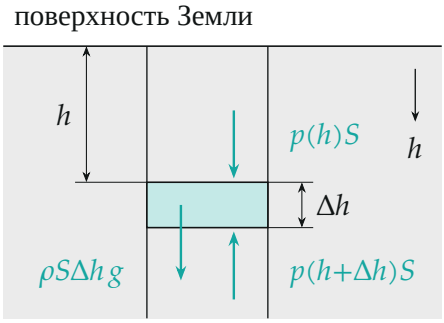


Изобразите графически зависимость плотности вещества Земли от глубины, соответствующую участку прямой пропорциональности на графике давления. На сколько изменяется плотность в точке излома графика давления?

▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на гидростатику в «толстом» слое жидкости. Давление на глубине создаёт вес вышележащего вещества. Если взять тонкий слой толщиной Δh, то давление под ним больше, чем над ним, ровно на вес слоя, делённый на площадь: $\Delta p = \rho g\,\Delta h$. Значит, *наклон* графика $p(h)$ равен ρg: где график прямой — плотность постоянна, где наклон меняется скачком — скачком меняется и плотность.

Обозначения. h — глубина (ось h направлена вниз, к центру Земли); $p(h)$ — давление; $\rho(h)$ — плотность вещества; S — площадь сечения мысленного столба; Δh — толщина тонкого слоя.

1. Связь плотности с наклоном графика. Выделим мысленно вертикальный столбик вещества сечением S и в нём тонкий слой между глубинами h и $h + \Delta h$ (рисунок). Вещество считаем жидкостью, оно покоится. На слой действуют: сила тяжести $\rho S \Delta h\, g$ вниз (по условию $F = mg$ с тем же g), сила давления сверху $p(h)S$ вниз и сила давления снизу $p(h+\Delta h)S$ вверх. Боковые силы давления горизонтальны и в вертикальную проекцию не входят.



Тонкий слой вещества в мысленном вертикальном столбике и силы, действующие на него вдоль вертикали.

Запишем условие равновесия слоя (второй закон Ньютона при нулевом ускорении) в проекции на ось h, направленную вниз:

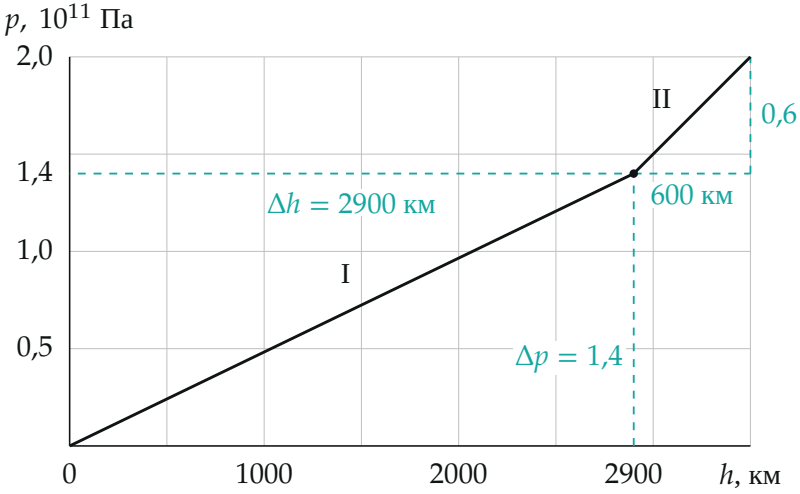
$$p(h)S + \rho S \Delta h\, g - p(h+\Delta h)S = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta p = p(h+\Delta h) - p(h) = \rho g\,\Delta h.$$

Отсюда

$$\rho = \frac{1}{g}\frac{\Delta p}{\Delta h},$$

то есть плотность — это наклон графика $p(h)$, делённый на g. На участке прямой пропорциональности $p = kh$ наклон k один и тот же при любом h, поэтому плотность там *постоянна* и $p = \rho g h$ — обычная формула гидростатики (давлением атмосферы, 10^5 Па, на фоне 10^{11} Па пренебрегаем).

2. Наклоны двух участков по графику. Перейдём к единицам СИ: 10^8 кПа $= 10^{11}$ Па, 1 км $= 10^3$ м. Излом графика — в точке $h_1 = 2900$ км, $p_1 = 1{,}40 \cdot 10^{11}$ Па; правый конец — $h_2 = 3500$ км, $p_2 = 2{,}00 \cdot 10^{11}$ Па. Наклоны снимем по большим треугольникам (рисунок): чем длиннее катеты, тем меньше относительная ошибка отсчёта.



Треугольники наклона двух участков графика давления: участок I — прямая пропорциональность, участок II — после излома.

Участок I (от 0 до 2900 км):

$$\rho_{\text{I}} = \frac{1}{g}\frac{p_1 - 0}{h_1 - 0} = \frac{1}{10} \cdot \frac{1{,}40 \cdot 10^{11}}{2{,}90 \cdot 10^6}\ \frac{\text{кг}}{\text{м}^3} \approx 4830\ \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}.$$

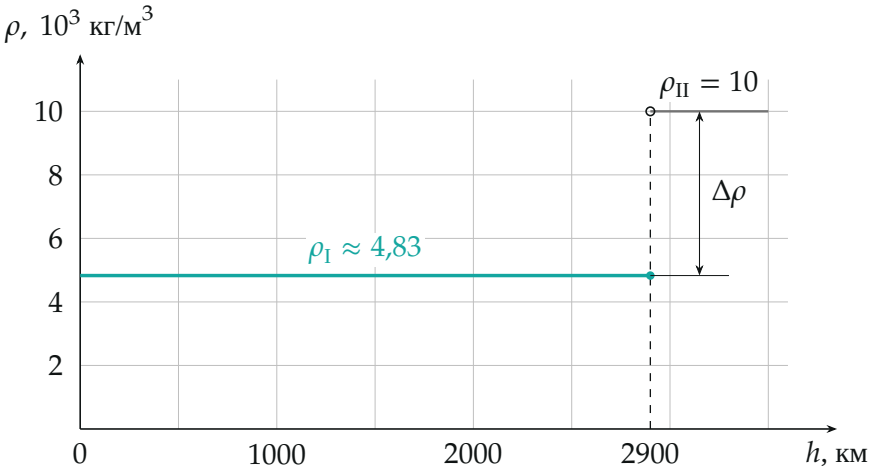
Участок II (от 2900 до 3500 км):

$$\rho_{\text{II}} = \frac{1}{g}\frac{p_2 - p_1}{h_2 - h_1} = \frac{1}{10} \cdot \frac{0{,}60 \cdot 10^{11}}{0{,}60 \cdot 10^{6}} \frac{\text{кг}}{\text{м}^3} = 10\,000 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}.$$

Отсчёт по графику делается с точностью до полуклетки ($0{,}025 \cdot 10^{11}$ Па), отсюда разброс $\approx \pm 50$ кг/м^3 у ρ_{I} и $\approx \pm 100$ кг/м^3 у скачка.

3. График плотности. На участке прямой пропорциональности ($0 < h < 2900$ км) плотность постоянна, $\rho_{\text{I}} \approx 4830$ кг/м^3, график — горизонтальный отрезок. В точке излома $h_1 = 2900$ км — граница мантии и жидкого внешнего ядра — наклон $p(h)$ меняется скачком, и плотность скачком возрастает до $\rho_{\text{II}} = 10\,000$ кг/м^3:

$$\Delta\rho = \rho_{\text{II}} - \rho_{\text{I}} \approx 10\,000 - 4830 \approx 5200 \text{ кг/м}^3.$$



Плотность вещества Земли по глубине. Бирюзовый отрезок — ответ на вопрос задачи (участок прямой пропорциональности); серый — вещество ядра за изломом.

Обратите внимание. Плотность определяется *наклоном* графика, а не отношением p/h в произвольной точке. На участке I это одно и то же (прямая идёт из начала координат), а на участке II — нет: $p_2/h_2 = 5{,}7 \cdot 10^4$ Па/м дало бы $\rho \approx 5700$ кг/м^3 вместо верных 10 000 кг/м^3.

Ответ. $\rho = \dfrac{1}{g}\dfrac{\Delta p}{\Delta h}$: на участке прямой пропорциональности $\rho \approx 4830$ кг/м^3 (постоянна); в изломе плотность возрастает на $\Delta\rho \approx 5200$ кг/м^3.

Проверка. Размерность: $\dfrac{\text{Па}}{\text{м}\cdot\text{м/с}^2} = \dfrac{\text{кг}/(\text{м}\cdot\text{с}^2)}{\text{м}^2/\text{с}^2} = \text{кг/м}^3$. Числа разумны: средняя плотность мантии около 4,5–5,5 г/см^3 (силикаты под давлением), ядро — железо с никелем, около 10–12 г/см^3. Второй способ для участка I: в точке $h = 1000$ км по графику $p = 0{,}483 \cdot 10^{11}$ Па, и $p/(gh) = 4830$ кг/м^3 — то же число.

Смысл: излом графика давления на глубине 2900 км — это граница мантии и ядра, где плотность вещества возрастает примерно вдвое.

Ответ. Плотность на участке прямой пропорциональности постоянна: $\rho \approx 4830$ кг/м^3 (график — горизонтальный отрезок от 0 до 2900 км); в точке излома плотность возрастает скачком на $\Delta\rho \approx 5200$ кг/м^3.