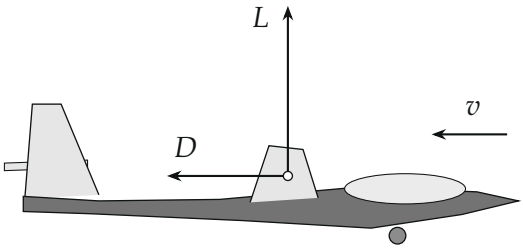
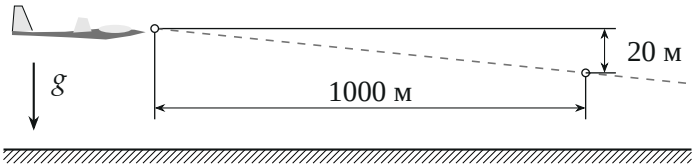
Планирование

Задача 5. [МОШ 2020/21, 9 класс, задача 5] На крыло летательного аппарата со стороны натекающего на него потока воздуха, движущегося со скоростью v (относительно крыла), действуют силы, зависящие от скорости v: подъёмная сила $L(v)$, ортогональная скорости, и сила сопротивления $D(v)$, сонаправленная скорости (см. рисунок). Отношение $K(v) = L(v)/D(v)$ называется *аэродинамическим качеством*. В этой задаче рассматривается полёт планера (безмоторного летательного аппарата), для которого аэродинамическое качество можно считать постоянным, не зависящим от направления и величины скорости v.



Известно, что в неподвижном (относительно земли) воздухе планер может лететь, снижаясь, с постоянной скоростью, так что уменьшение высоты будет составлять 20 метров на каждый километр перемещения по горизонтали (рис. ниже).



Тот же планер может лететь, не снижаясь, со скоростью $w = 20$ м/с относительно земли во встречном восходящем потоке воздуха, скорость которого относительно земли равна $u = 5$ м/с и направлена под малым углом α к горизонтали (см. Указание). Найдите значение угла α.

Указание. При решении задач 1 и 5 могут оказаться полезными следующие приближённые соотношения для тригонометрических функций малых углов α ($\alpha \ll 1$, $[\alpha] = $ рад): $\sin\alpha \approx \alpha$, $\cos\alpha \approx 1$, $\operatorname{tg}\alpha \approx \alpha$.

▲ **Решение.** **Что происходит.** Сила воздуха на крыло зависит только от скорости планера *относительно воздуха*: подъёмная сила L перпендикулярна этой скорости, сопротивление D направлено вдоль неё, а их отношение $D/L = 1/K$ задаёт угол, на который суммарная сила воздуха отклонена от перпендикуляра к относительной скорости. В обоих режимах полёт равномерный, значит, сила воздуха уравновешивает силу тяжести и направлена строго вверх. Поэтому в обоих режимах скорость планера относительно воздуха наклонена к горизонтали вниз на один и тот же угол φ. Главная идея — перейти в систему отсчёта воздуха и сложить скорости.

Обозначения. $\vec{v}_0$ — скорость планера относительно неподвижного воздуха; φ — угол её наклона вниз от горизонтали; $\vec{w}$ — скорость планера относительно земли во втором режиме (горизонтальна); $\vec{u}$ — скорость восходящего потока относительно земли; $\vec{v}$ — скорость планера относительно воздуха во втором режиме; β — угол её наклона вниз от горизонтали; $\vec{R} = \vec{L} + \vec{D}$ — суммарная сила воздуха.

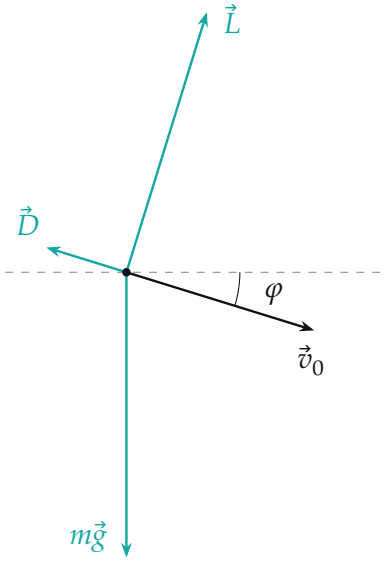
1. Полёт в неподвижном воздухе: качество планера. Планер летит по прямой, снижаясь на 20 м на каждые 1000 м по горизонтали, поэтому

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{20}{1000} = 0{,}02, \qquad \varphi \approx 0{,}02 \text{ рад}.$$

Скорость постоянна, ускорения нет. Запишем второй закон Ньютона для планера:

$$m\vec{g} + \vec{L} + \vec{D} = 0.$$

Сила $\vec{D}$ направлена против $\vec{v}_0$, то есть вверх-назад под углом φ к горизонтали, а $\vec{L} \perp \vec{v}_0$ — отклонена от вертикали вперёд на тот же угол φ (рисунок). Удобно взять оси вдоль скорости (x) и перпендикулярно ей (y): тогда каждая сила воздуха лежит на своей оси, а раскладывать придётся только $m\vec{g}$.



Силы, действующие на планер при снижении в неподвижном воздухе. Длины стрелок пропорциональны силам; угол φ и сила $\vec{D}$ (она в 50 раз меньше $\vec{L}$) для наглядности увеличены в 15 раз. Сила $\vec{L}$ отклонена от вертикали вперёд на тот же угол φ.

Проекции на ось y (перпендикулярно $\vec{v}_0$) и на ось x (вдоль $\vec{v}_0$):

$$L = mg\cos\varphi, \qquad D = mg\sin\varphi.$$

Делим второе на первое:

$$\frac{D}{L} = \operatorname{tg}\varphi \quad \Rightarrow \quad K = \frac{L}{D} = \frac{1}{\operatorname{tg}\varphi} = 50.$$

Обратная мысль тоже верна: если K известно, то при равномерном полёте скорость относительно воздуха *обязана* быть наклонена вниз на угол φ с $\operatorname{tg}\varphi = 1/K$ — иначе $\vec{R}$ не была бы вертикальной и не уравновесила бы $m\vec{g}$.

2. Полёт в восходящем потоке: те же силы. Во втором режиме планер снова движется равномерно и прямолинейно (относительно земли, а значит, и относительно воздуха: поток однородный и равномерный),

поэтому снова $\vec{L} + \vec{D} = -m\vec{g}$ — суммарная сила воздуха вертикальна и равна mg. Качество то же, $D/L = 1/K$, значит, и геометрия сил та же: скорость планера относительно воздуха $\vec{v}$ наклонена вниз на тот же угол, $\beta = \varphi$. Горизонтально летит планер относительно *земли*, а относительно воздуха он по-прежнему «съезжает вниз».

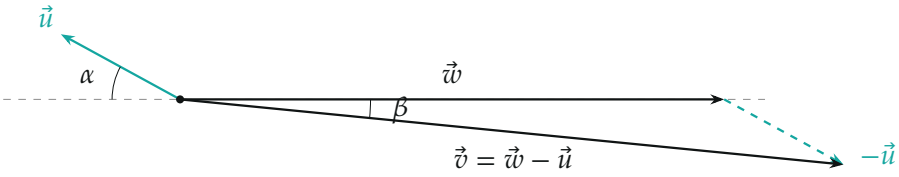
3. Треугольник скоростей. Закон сложения скоростей: скорость планера относительно земли равна скорости относительно воздуха плюс скорость воздуха относительно земли,

$$\vec{w} = \vec{v} + \vec{u} \quad \Rightarrow \quad \vec{v} = \vec{w} - \vec{u}.$$

Ось x — горизонтально по направлению полёта, ось y — вверх. Поток встречный и восходящий: $u_x = -u\cos\alpha$, $u_y = u\sin\alpha$; $w_x = w$, $w_y = 0$. Тогда

$$v_x = w + u\cos\alpha, \qquad v_y = -u\sin\alpha.$$

Знак минус у v_y: относительно воздуха планер движется вниз, как и должно быть.



Треугольник скоростей во втором режиме. Длины пропорциональны модулям ($w = 20$ м/с, $u = 5$ м/с), углы для наглядности увеличены в 5 раз.

Угол наклона относительной скорости:

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{|v_y|}{v_x} = \frac{u\sin\alpha}{w + u\cos\alpha}.$$

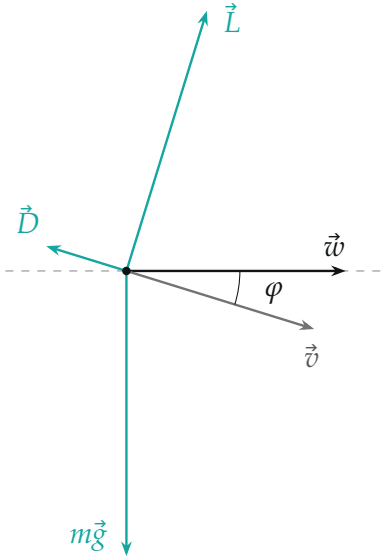
4. Угол потока. Приравниваем $\beta = \varphi$ (шаг 2):

$$\frac{u\sin\alpha}{w + u\cos\alpha} = \operatorname{tg}\varphi.$$

Угол α мал (по условию), поэтому $\sin\alpha \approx \alpha$, $\cos\alpha \approx 1$, $\operatorname{tg}\varphi \approx \varphi$:

$$\frac{u\alpha}{w+u} = \varphi \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{w+u}{u}\varphi = \frac{20+5}{5}\cdot 0{,}02 = 0{,}1 \text{ рад} \approx 5{,}7^\circ.$$

Без приближений: $\sin\alpha - 0{,}02\cos\alpha = 0{,}08$, откуда $\alpha = \arcsin\dfrac{0{,}08}{\sqrt{1{,}0004}} + \operatorname{arctg}0{,}02 = 0{,}1001$ рад — то же число; $\alpha \approx 0{,}1 \ll 1$, приближение оправдано.



Силы во втором режиме: планер летит горизонтально относительно земли, но относительно воздуха его скорость $\vec{v}$ наклонена вниз на тот же угол φ — поэтому картина сил та же, что при снижении (угол и $\vec{D}$ увеличены в 15 раз, как на рисунке сил при снижении).

Обратите внимание. Подъёмная сила перпендикулярна скорости относительно *воздуха*, а не относительно земли. Если считать $\vec{L}$ перпендикулярной горизонтальной $\vec{w}$, то сопротивление D ничем не уравновешено, и равномерный полёт без снижения невозможен; восходящий поток «наклоняет» относительную скорость вниз и тем самым поворачивает $\vec{L}$ вперёд, компенсируя сопротивление.

Ответ. $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{20}{1000}, \quad \alpha = \dfrac{w+u}{u}\varphi = 0{,}1$ рад $\approx 5{,}7°$.

Проверка. Размерность: $(w+u)/u$ — безразмерное, φ — в радианах, верно. Предел: если планер не движется относительно земли ($w = 0$), получаем $\alpha = \varphi$ — поток просто должен дуть вверх под углом снижения, и планер «висит» в нём, как в неподвижном воздухе висел бы при движении со скоростью u вниз под углом φ. Чем быстрее планер летит навстречу (w растёт), тем круче должен подниматься поток: вертикальная составляющая $u\alpha$ должна компенсировать снижение $(w+u)\varphi$ относительно воздуха.

Смысл: планер в восходящем потоке по-прежнему снижается относительно воздуха, но воздух поднимается с той же вертикальной скоростью $u\alpha = (w+u)\varphi = 0{,}5$ м/с, и относительно земли высота не меняется.

Ответ. $\alpha = \dfrac{w+u}{u}\varphi = 0{,}1$ рад $\approx 5{,}7°$, где $\varphi \approx \operatorname{tg}\varphi = 20/1000 = 0{,}02$ рад — угол снижения планера в неподвижном воздухе.